La Relativité Restreinte dans un Espace à 1 Dimension

(inspiré par Gerd Binnig : Aus dem Nichts, Piper, München,1989)

Harald WERTZ

Département Informatique

Université Paris8

D'abord, cf. Figure 1, une planche de Galton (qui fut inventé pour des études statistiques) :

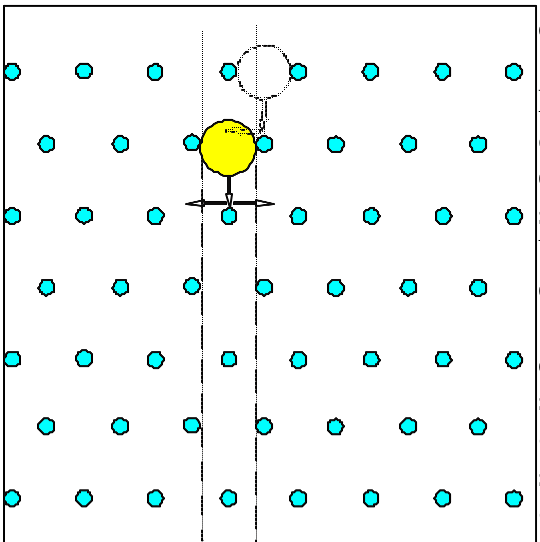

Figure 1: une planche de Galton

c'est une planche verticale avec des clous arrangés à distance régulière en lignes horizontales. Les lignes sont déplacées verticalement de manière telle que chaque clou de chaque ligne se trouve exactement au milieu de deux clous de la ligne supérieure et de la ligne inférieure. Quand une boule tombe entre deux clous, elle doit décider si elle roule à gauche ou à droite du clou en-dessous. Ce qui est important, c'est que la boule doit faire cette décision de nouveau à chaque ligne. On peut s'imaginer que la boule lance un dé pour décider d'aller à gauche ou à droite. Le système est très simple puisque la boule n'a que deux choix ; dans des système complexes le nombre de choix offerts est largement supérieur.

Dans le cas statistique ordinaire, le rapport entre les dés indiquant un choix à gauche (N_L) et les dés indiquant un choix à droite (N_R), donc $\frac{N_L}{N_R} = \alpha$ sera égal à 1. Supposons que, sans que la boule s'en apperçoive, une force excercée sur la boule (ou sur le dé) puisse changer ce rapport α, par exemple en privilégiant les choix vers la droite. De telles dissymmétries sont tout à fait naturelles : une personne marchant dans le desert ne sait pas marcher en ligne droite. De légères dissymmétries le font marcher en cercles. Par ailleurs, s'il y avait plusieurs de tels marcheurs, chacun d'eux serait convaincu que c'est lui qui marche en ligne droite !

Définissons alors le temps et l'espace dans un système basé sur la planche de Galton. Le temps peut naturellement être mesuré par le lancement d'un dé : un lancement de dé correspond à un tic d'horloge. Le temps qui s'est écoulé à un instant t est mesuré par la distance verticale (i.e. le nombre de lignes de clous ou de lancements de dés) que la boule a parcouru (resp. effectué). Pour la coordonnée de l'espace ne reste alors que l'orientation horizontale : un pas vers la gauche (resp. la droite) correspond à la distance d'unité x_0. Rappelons que le mouvement latéral des boules peut être très différent : une boule avec un $\alpha = 1$ tombe vers le bas, pratiquement sans déplacement latéral. Si α est différent de 1, le nombre de pas dans une des deux directions sera supérieur au nombre de pas dans l'autre direction. Ceci implique qu'une distance Δx peut être exprimée par $\left(N_L - N_R\right) x_0$ (où x_0 est la distance horizontale entre deux clous adjacents), et le temps écoulé Δt peut être exprimé par $\left(N_L + N_R\right) t_0$ (où t_0 est la durée unité, c'est à dire : le temps nécessaire pour le passage d'une ligne de clous à la suivante). Ceci permet d'exprimer la vitesse V comme :

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{N_L - N_R}{N_L + N_R} * \frac{x_0}{t_0}$$

Puisque $\frac{N_L}{N_R} = \alpha$, on peut exprimer V avec α.

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{N_L - N_R}{N_L + N_R} * \frac{x_0}{t_0} = \frac{\frac{N_L}{N_R} - \frac{N_R}{N_R}}{\frac{N_L}{N_R} + \frac{N_R}{N_R}} * \frac{x_0}{t_0} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} * \frac{x_0}{t_0}$$

Nommons c la fraction $\frac{x_0}{t_0}$, ce qui est justifié par le fait que c est la vitesse maximale dans ce système, c'est-à-dire : la vitesse correspondant à $\alpha = 0$ ou $\alpha = \infty$, donc à un dé donnant toujours un choix vers la gauche ou toujours un choix vers la droite. Ce qui donne finalement pour la vitesse :

$$V = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} * c$$

Addition de Vitesses

Supposons alors qu'il y ait plusieurs boules à des vitesses V_i différentes. Comment peuvent-elles se percevoir ? Supposons que chaque boule mesure la vitesse de l'autre en trouvant le α de cette autre boule. Bien entendu, de même que le marcheur dans le desert, chaque boule se représente elle-même comme normale, c'est-à-dire : elle prend son α égal à 1. Ceci implique qu'elle voit son α déformé par un facteur de $\frac{1}{\alpha}$ (puisque $\alpha * \frac{1}{\alpha} = 1$). De même, elle voit tous les autres α déformés par $\frac{1}{\alpha}$. Une boule 1 avec un α égale à α_1 voit alors la vitesse d'une boule 2 avec un deuxième α égale à α_2 relative à soi-même comme :

$$V_{rel_1} = \frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1} * c = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} * c$$

La deuxième boule mesurera à son tour la vitesse relative suivante :

$$V_{rel_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_1} * c = -V_{rel_1}$$

Comme d'habitude, chacun trouve le même résultat avec le signe inversé. Comme on peut voir ci-dessous, il y a encore plus dans cette équation.

D'abord calculons α_1 en terme de V_1 :

$$V_1 = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + 1} * c \;\rightarrow \frac{\alpha_1 V_1}{c} + \frac{V_1}{c} = \alpha_1 - 1 \rightarrow \alpha_1\left(1 - \frac{V_1}{c}\right) = 1 + \frac{V_1}{c} \rightarrow \alpha_1 = \frac{1 + \frac{V_1}{c}}{1 - \frac{V_1}{c}}$$

ce qui donne, si l'on exprime V_{rel_1} avec V_1 et V_2 au lieu des α_i :

$$V_{rel_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} * c = \frac{\frac{1 + \frac{V_2}{c}}{1 - \frac{V_2}{c}} - \frac{1 + \frac{V_1}{c}}{1 - \frac{V_1}{c}}}{\frac{1 + \frac{V_2}{c}}{1 - \frac{V_2}{c}} + \frac{1 + \frac{V_1}{c}}{1 - \frac{V_1}{c}}} * c$$

$$= \frac{\frac{V_2 - V_1}{c}}{1 - \frac{V_1 V_2}{c^2}} * c$$

$$= \frac{V_2 - V_1}{1 - \frac{V_1 V_2}{c^2}}$$

Cette dernière forme est exactement la formule d'Einstein pour l'addition relativiste de vitesses. Les vitesses s'additonnent de manière non linéaire (sauf pour de très petites valeurs de $\frac{V_1 V_2}{c}$). Puisque chacun peut voir les α_i des autres au maximum à 0 resp. ∞, il voit leurs vitesses maximales soit comme c soit comme -c.

Dilatation du Temps

L'hypothèse qu'une boule 1 voit le facteur α d'une boule 2 déformé d'un facteur ζ précis, implique que la boule 1 voit les décisions d'aller à droite (resp. à gauche) de la boule 2 déformé d'un facteur ε, et les décisions d'aller à gauche (resp. à droite) déformé d'un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$. Puisque

$$\frac{N_L}{N_R} = \alpha \text{ et } \frac{N_0 * \varepsilon}{N_0 * \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{N_L}{N_R}$$

on en conclut que $\varepsilon = \sqrt{\alpha}$. Ici, N_0 est le nombre de mouvements à gauche (resp. à droite) d'une boule avec $\alpha = 1$. Autrement dit, si je vois N_L déformé d'un facteur $\sqrt{\alpha}$ et N_R d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, alors je vois le rapport $\frac{N_L}{N_R}$ déformé d'un facteur α. Ainsi, par exemple, si $\alpha = 9$, ε est égal à 3. Une boule avec une telle déformation va (en moyenne) en 10 pas 9 fois vers la gauche et 1 fois vers la droite. Néanmoins, elle croit d'elle-même qu'elle est allée $\frac{9}{3} = 3$ fois vers la gauche et $1 * 3 = 3$ fois vers la droite. Sa montre est ralentie, puisqu'elle suppose d'avoir fait seulement 6 pas (au lieu des 10). Le facteur de ralentissement de la montre est de $\frac{10}{6}$, ou, plus généralement :

$$F_t = \frac{N_0 + N_0}{\varepsilon\, N_0 + \frac{1}{\varepsilon}\, N_0} = \frac{2}{\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$$

Sachant que $\alpha_1 = \frac{1 + \frac{V_1}{c}}{1 - \frac{V_1}{c}}$ essayons de traduire ceci en termes dépendant de la vitesse :

$$F_t = \frac{2}{\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
F_t^2 &= \frac{4}{\alpha + \frac{1}{\alpha} + 2} \\
&= \frac{4\,\alpha}{1 + \alpha^2 + 2\,\alpha} \\
&= \frac{4\,\alpha}{(1+\alpha)^2} \\
&= \frac{4\,\dfrac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}{\left(1 + \dfrac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}\right)^2} \\
&= \frac{4\left(1+\frac{V}{c}\right)\left(1-\frac{V}{c}\right)}{\left(1-\frac{V}{c}\right)^2 + \left(1+\frac{V}{c}\right)^2 + 2\left(1-\frac{V}{c}\right)\left(1+\frac{V}{c}\right)} \\
&= 1 - \frac{V^2}{c^2}
\end{aligned}
$$

d’où finalement :

$$F_t = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Ceci correspond exactement à la dilatation relativiste du temps.

Imaginons une planche de Galton dans laquelle un grand nombre de boules, avec des α_i différents, envoient un signal tous les 10 pas. On peut alors observer que les signaux sont envoyés de plus en plus rarement pour des α de la boule émetteur différent de 1. Mais comment s’observent-elles mutuellement ?

Elles commencent toutes à un point avec l'accord de s'envoyer un photon (une boule avec $\alpha = 0$ ou $\alpha = \infty$). Une boule avec un $\alpha = 1$ attend un photon d'une boule avec $\alpha = 9$ après 18 pas, puisque le photon doit encore parcourir 9-1 = 8 pas horizontalement. Elle ne le reçoit néanmoins qu'après 30 pas, puisque l'autre boule compte mal et n'envoie le photon, puisque $F_t = \frac{N_0+N_0}{\varepsilon\, N_0 + \frac{1}{\varepsilon}\, N_0}$ ce qui est dans ce cas $F_t = \frac{5+5}{3*5+\frac{1}{3}*5} = \frac{10}{15+\frac{5}{3}}$, qu'après 15 plus $\frac{5}{3}$ pas.

Ce qui explique le delai de 30 pas : la boule fait 15 mouvements vers la gauche et $\frac{5}{3}$ mouvement vers la droite, ce qui donne un temps écoulé de $15+\frac{5}{3} = \frac{50}{3}$ unités avant l'envoi d'un photon; le photon doit encore parcourir les $15-\frac{5}{3} = \frac{40}{3}$ déplacements horizontaux, ce qui donne un temps total de $\frac{50}{3}+\frac{40}{3} = 30$ unités. Le rapport $\frac{30}{18}$ correspond bien à la valeur $\frac{10}{6}$.

L'autre boule mesure la même vitesse relative et attend le photon également après 18 pas. Puisqu'elle compte de manière erronée, elle pense avoir parcouru 30 pas, donc 15 pas vers la gauche et 15 pas vers la droite. Mais $15*3+\frac{15}{3} = 45+5$. Elle ne reçoit donc le photon qu'après 50 pas. Donc, elle aussi pense que l'horloge de l'autre boule retarde d'un facteur $\frac{50}{30} = \frac{10}{6}$.

à faire :

modification de la masse

idée : la force devrait multiplier le α par un facteur constant

comportement quantique

idée 1 : boule avec $\alpha = 1$, à durée de vie très courte, + ou - determinable où elle se trouve. Le + la vie dure, le - est prévisible où elle se trouve à un instant donné (max à distance t si $t >> 1$)

idée 2 : si l'on sait où la boule se trouve, impossible de déterminer son α, donc sa vitesse