

Raisonnement par récurrence

Il faut un ensemble Ψ bien ordonné :

Pour cela il faut :

$$\forall x, y, z \in \Psi, x \diamond y \wedge y \diamond z \Rightarrow x \diamond z \quad \text{transitivité}$$

Une relation d'ordre tel que : $\forall x, y \in \Psi, (x \diamond y \vee y \diamond x) \vee x = y$ anti-réflexivité

$$\forall \wp \subset \Psi, \exists x \in \wp \text{ tq } \forall y \in \wp, x \diamond y$$

La dernière ligne dit qu'il doit exister un plus petit élément.

Exemple type d'un tel ensemble : les entiers naturels \mathbb{E} avec la relation d'ordre habituelle.

Récurrence simple

il faut : une hypothèse $S(n)$

$$\text{exemple : } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ensuite il faut :

1) démontrer l'hypothèse sur le plus petit élément (la base) : $S(1)$

$$\text{exemple : } 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2) sous l'hypothèse que $S(n)$ soit vraie, démontrer (le pas) : $S(n+1)$

$$\text{exemple : } 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1)$$

l'utilisation de l'hypothèse donne:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2 + n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1) + 1]}{2} \end{aligned}$$

Ce qui est bien exactement de la même forme que l'hypothèse originale : l'hypothèse est donc démontrée.

Raisonnement par récurrence

Rappelons alors : il faut un ensemble avec une relation d'ordre, une hypothèse, et durant la preuve il faut utiliser l'hypothèse (ça s'appelle *fertiliser* avec l'hypothèse).

Voici une version modifiée de l'induction simple sur des entiers. Puisqu'on n'a besoin que d'un ensemble muni d'une relation d'ordre, tout sous-ensemble des entiers peut se prêter à ce raisonnement. Si l'hypothèse stipule que $S(n)$ soit vraie $\forall n \geq n_0$ alors il faut démontrer $S(n_0)$ ensuite $S(n+1)$.

Deuxième exemple pour la récurrence simple :

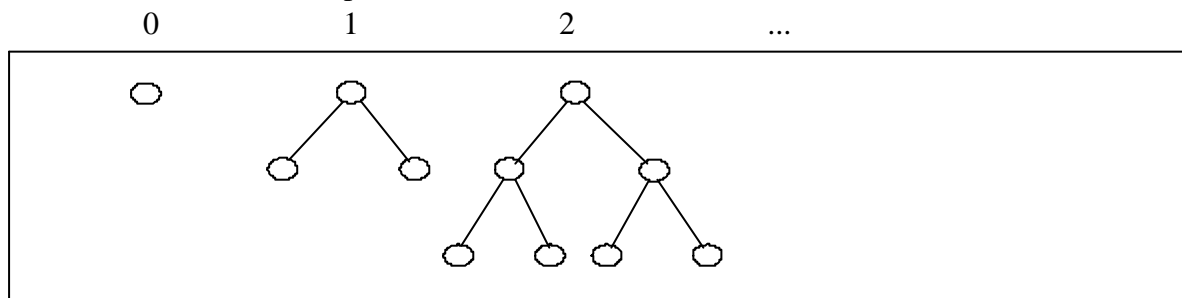
soit l'hypothèse $S(n) = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

preuve pour la base : $2^0 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$

preuve pour le pas :

$$\begin{aligned}
 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\
 &= 2 * 2^{n+1} - 1 \\
 &= 2^{n+2} - 1 \\
 &= 2^{(n+1)+1} - 1 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Exercice 1 : une version simplifiée, et illustratrice, de ce théorème serait :



et de démontrer par un raisonnement par récurrence que les arbres binaires de profondeur n ont 2^n feuilles terminales.

Exercice 2 : démontrez les égalités suivantes

$$\frac{1}{1 * 2} + \frac{1}{2 * 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Voici une légère généralisation pour une hypothèse $S(n)$: jusqu'ici on a la récurrence "*vers le haut*", c'est-à-dire : $\forall n, n_0 \leq n \leq m_0 - 1$ alors (1) il faut démontrer $S(n_0)$ et (2) il faut démontrer $S(n+1)$. La récurrence "*vers le bas*" implique que pour $\forall n, n_0 + 1 \leq n \leq m$, après avoir démontré $S(n_0)$ il faut ensuite démontrer $S(n-1)$.

Récurrence forte

Si la récurrence simple démontre

Raisonnement par récurrence

$$S(n_0)$$

$$S(n) \Rightarrow S(n+1)$$

la récurrence forte démontre

$$S(n_0)$$

$$S(n_0) \wedge S(n_1) \wedge \dots \wedge S(n) \Rightarrow S(n+1)$$

C'est donc un raisonnement qui suppose que l'hypothèse tient sur tous les éléments $i \leq n$.

Exemple 1 : pour démontrer que $n = \text{nombre_premier}(x) * \text{nombre_premier}(y) * \dots$, donc pour démontrer que tout nombre entier est le produit d'un ensemble de nombres premiers, on procède comme suit :

d'abord la base en prenant : $n = 2$, 2 est clairement un nombre premier (très particulier);

ensuite supposons que l'hypothèse tienne pour $n = 2, 3, 4, \dots, n$ alors :

$$\text{nombre_premier}(n+1) \Rightarrow (n+1)$$

$$\text{sinon : } \exists a \text{ avec } 1 \ll a \ll n+1 \text{ tq } \frac{(n+1)}{a} = b \Rightarrow n+1 = a * b$$

alors, puisque $a \leq n \wedge b \leq n$, par hypothèse a et b sont produit de nombres entiers.

Exemple 2 : pour la suite des nombres de Fibonacci f_i , avec $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, nous pouvons formuler l'hypothèse $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \leq a^{n-1}$. Pour démontrer cette hypothèse, il faut alors d'abord considérer le cas de f_0 et celui de f_1 (les deux membres de la suite qui ne sont pas exprimable comme somme de deux prédécesseurs) :

$$\text{cas de } f_0 : a^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \geq 0 = f_0$$

$$\text{cas de } f_1 : a^{1-1} = a^0 = 1 \geq 1 = f_1$$

ensuite, prenons l'hypothèse que $\forall m \leq n, f_m \leq a^{m-1}$

reste à démontrer que $f_{n+1} \leq a^{(n+1)-1}$

notons tout d'abord que de l'hypothèse original : $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \leq a^{n-1}$ nous pouvons aisément conclure que $f_n \leq a^{n-1}$ et que $f_{n-1} \leq a^{(n-1)-1}$, donc

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \leq a^{n-1} + a^{n-2} = a^{n-2} * (a+1)$$

reconnaissant que $a^2 = a+1$ nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus comme :

$$f_n + f_{n-1} \leq a^{n-1} + a^{n-2} = a^{n-2} * (a+1)$$

$$\leq a^{n-2} * a^2$$

$$\leq a^n$$

$$\leq a^{(n+1)-1} \quad \checkmark$$

Ok ?

Raisonnement par récurrence

Voici un exercice pour se faire la main avec la récurrence forte : il s'agit de démontrer l'hypothèse $\forall n, a^{n-2} \leq f_{n+2} - 1$.

Récurrence généralisée

Soit X un ensemble bien ordonné par \leq , et $\forall x \in X \Rightarrow S(x)$, alors il faut démontrer que

- 1 $S(x_0)$ est vrai, avec x_0 le plus petit élément de X
- 2 $\forall x \in X, x_0 \leq x \wedge \forall y \leq x, S(y) \Rightarrow S(x)$

exemple :

soit

$$S_{0,0} = 0$$
$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 1 & \text{si } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

il faut démontrer que $S_{m,n} = m + n$

1. la base : $S_{0,0} = 0 = 0 + 0$
2. le pas : supposons $S_{m',n'} = m' + n'$ avec (dans l'ordre lexicographique) $\langle m', n' \rangle \ll \langle m, n \rangle$, alors :
 - a. $n = 0 \Rightarrow S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$ mais $\langle m-1, n \rangle \ll \langle m, n \rangle$
et, par hypothèse $S_{m-1,n} = (m-1) + n$, donc :
 $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m-1 + n) + 1 = m + n$
 - b. $n \neq 0 \Rightarrow S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$ et, par définition, $\langle m, n-1 \rangle \ll \langle m, n \rangle$
et par hypothèse, $S_{m,n-1} = m + (n-1)$, donc :
 $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = (m + n - 1) + 1 = m + n$

✓

Exercice :

$$S_{1,1} = 5$$

soit la définition : $\forall m, n \in \mathbb{E}^+$

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 2 & \text{si } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

démontrez : $S_{m,n} = 2 * (m + n) + 1$