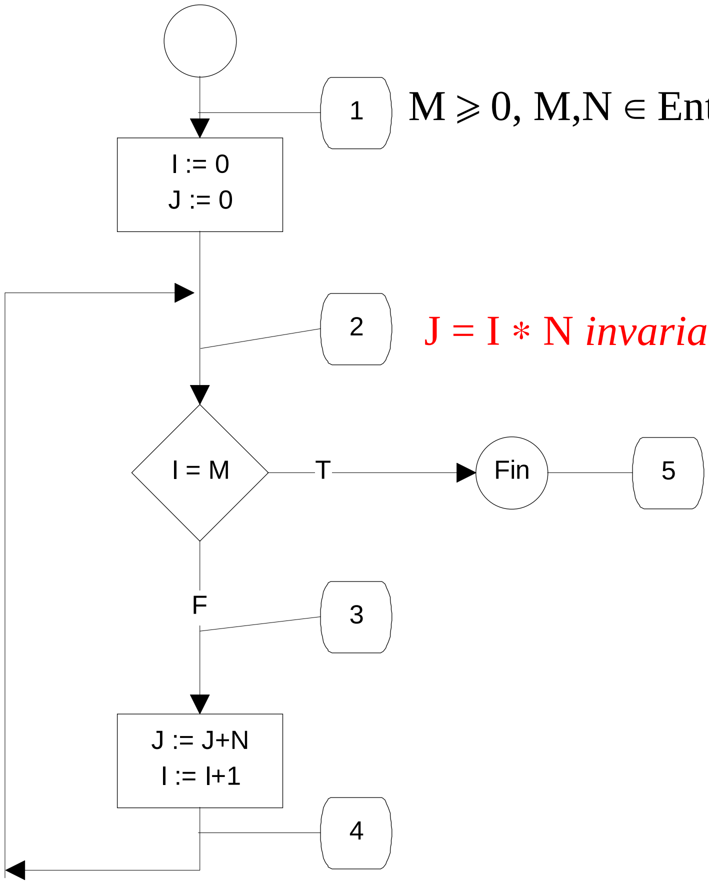
Correction de Programmes

Soit l'organigramme suivant :

Exécution réelle : p.ex.: M=3 et N=5
Exécution symbolique : M=m et N=n



1: $M \geqslant 0$, $M,N \in$ Ent. Nat.

2: $J = I * N$ *invariante de boucle*

5: $I = M$ *condition de terminaison*

$J = M * N$ *assertion de corretion*

Comment trouver une Invariante

Nombre de fois l'exécution traverse 2	Valeur de I	Valeur de J
1	0	0
2	1	N
3	2	2∗N
…	…	…
…	…	…
M+1	M	M∗N

$J = I * N$

Boucle 2-3-4 M-fois exécutée

La preuve de correction (partielle)

Démontrons par induction sur le nombre d'exécution du point 2 que $J = I * N$

1. Si ==1 alors I=0 et J=0 donc: $J=I*N=0*N$
2. Supposons $J_n=I_n*N$

   pas : $I_{n+1}=I_n+1$ et $J_{n+1}=J_n+N$ alors :

   $J_{n+1}=I_n*N + N$ (par hypothèse)

   $=(I_n+1)*N$

   $=I_{n+1}*N$

La preuve de terminaison

Il faut démontrer que si $M \geqslant 0$ alors $I=M$ après un nombre fini de pas

Induction vers le haut sur $I=m$:

faut démontrer que si $M \geqslant 0$ avec $0 \leqslant m \leqslant M$ alors exécution arrive à **2** avec $I=M$

1) base : si $m=0$ alors $I=0$ et $M=0$ implique $I=M$

2) pas : $I=m$, $0 \leqslant m \ll M$ au point **2**

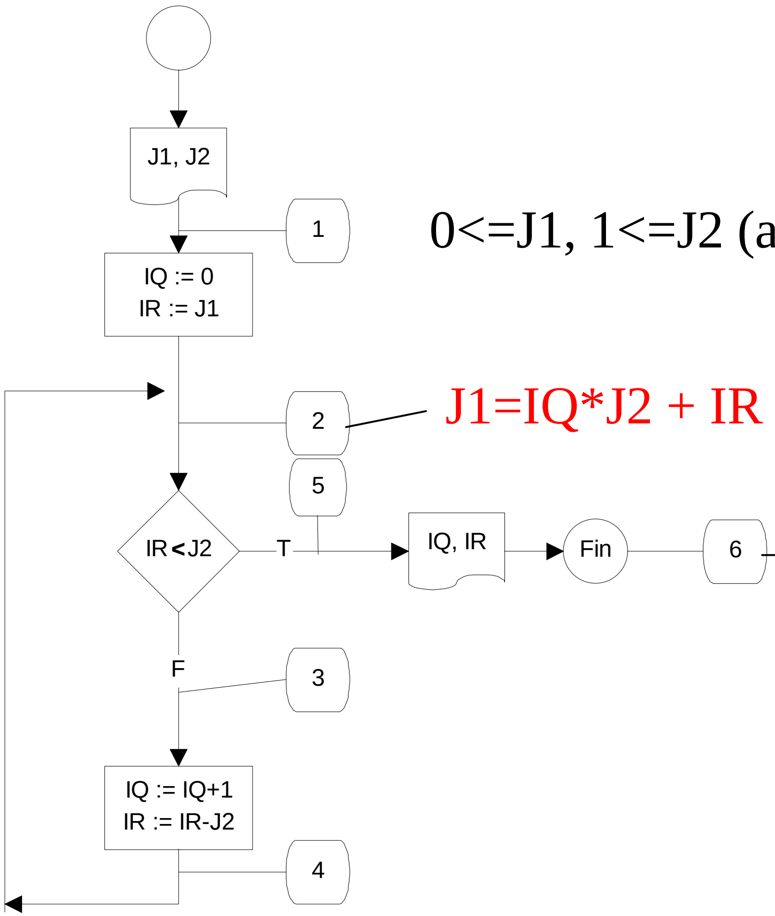
montrons que l'exécution arrive à **2** avec $I=m+1$:

si $I=m$, $0 \leqslant m \ll M \Rightarrow$ non($I=M$)

$\Rightarrow$ une exécution de la boucle $\Rightarrow I=m+1$ √

Fin de la preuve de $J=I*N$ et de la terminaison du programme

Calcul du Quotient et Reste



0<=J1, 1<=J2 (assertion d'entrée)

J1=IQ*J2 + IR (invariante)

J1=IQ∗J2 + IR et

0<=IR<J2 (terminaison)

l’invariante du programme 2

nombre de fois l’exécution traverse 2	Valeur de IQ	Valeur de IR
1	0	J1
2	1	J1 – J2
3	2	J1 – 2∗J2
4	3	J1 – 3∗J2
…	…	…
M+1	M	J1 – M∗J2

donc: $IR = J1 - IQ * J2$ donc : $J1 = IQ * J2 + IR$

Preuve de correction du programme 2

Pour démontrer que $J1=IQ*J2+IR$ (au point **2**)

1) base: $IQ=0, IR=J1 \Rightarrow$ ✓

2) Après 1 exécution de la boucle 2-3-4 :

   $IQ_{n+1}*J2+IR_{n+1}=(IQ_n+1)*J2+IR_n-J2 = J1$ ✓

   Puisqu'il n'y a pas de modification sur le chmein **2 – 6**

   la correction est démontrée

Preuve de terminaison

Condition de Terminaison : $0<=IR<J2$

1) Démontrer $0<=IR$

   a) $IR=J1$ et $0<=J1$ $\checkmark$

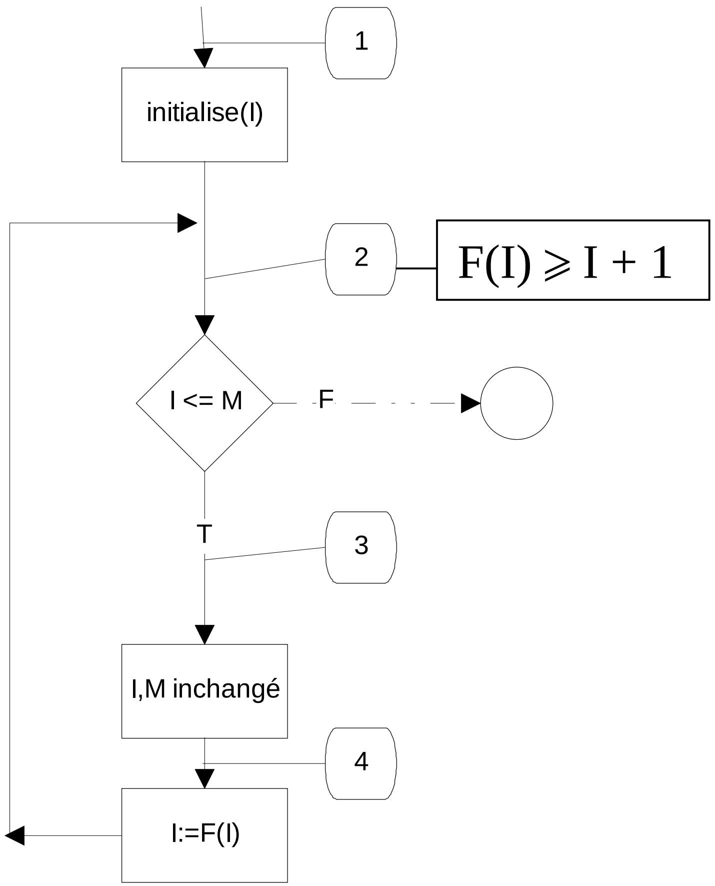
   b) $0<=IR_n$ après 1 exécution, si $IR_n >= J2$

      alors $IR_{n+1}=IR_n-J2 \Rightarrow 0<=IR_n - J2 = IR_{n+1}$ $\checkmark$

2) Démontrer $IR<J2$

   puisque $1<=J2$ et $IR_{n+1}:=IR_n-J2$ alors $IR_{n+1}<IR_n$ $\checkmark$

Sur la Terminaison (1)



soit I_0>M et prog termine à n=1

Sinon, supposons qu'après n_0 exéc. le prog. termine, on a alors:

1) $I > M$ et $I \geqslant I_0 + n_0 - 1$ (puisque $F(I)-1 \geqslant I$)

   Donc : $M < I_0 + n_0 - 1 \Rightarrow n_0 > M - I_0 + 1$

2) Et: $n_0 \geqslant M - I_0 + 2$ (puisque dernière exec)

1)&2) $\Rightarrow I \geqslant I_0 + (M - I_0 + 2) - 1 = M+1$

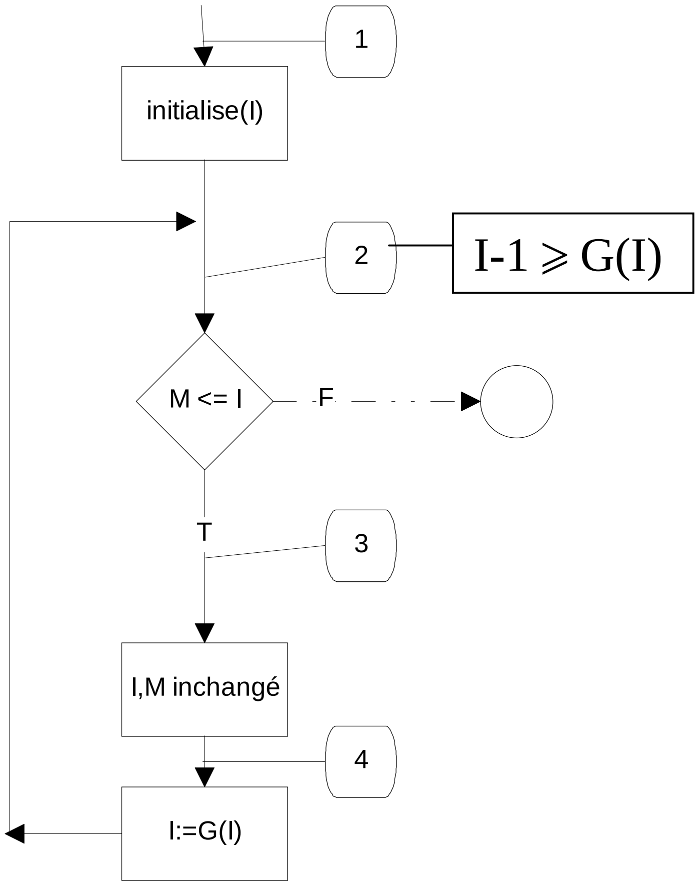
Par induction :

$M < I_0 + n_0 - 1$ et $I \geqslant I_0 + n_0 - 1$

Après une exécution on a :

$$I \geqslant I_0 + n_0 - 1 + 1 = I + n_0 > I_0 + n_0 - 1$$

Sur la Terminaison (2)



Soit $I_0 < M$ alors à n=1 le prog. Termine

Sinon, supposons qu'après n_0 exéc. le prog. termine, on a alors:

Puisque $G(I) \leqq I - 1$

$$I \leqq I_0 - (n_0 - 1) = I_0 - n_0 + 1$$

$I<M \Rightarrow I_0 - n_0 + 1 < M$

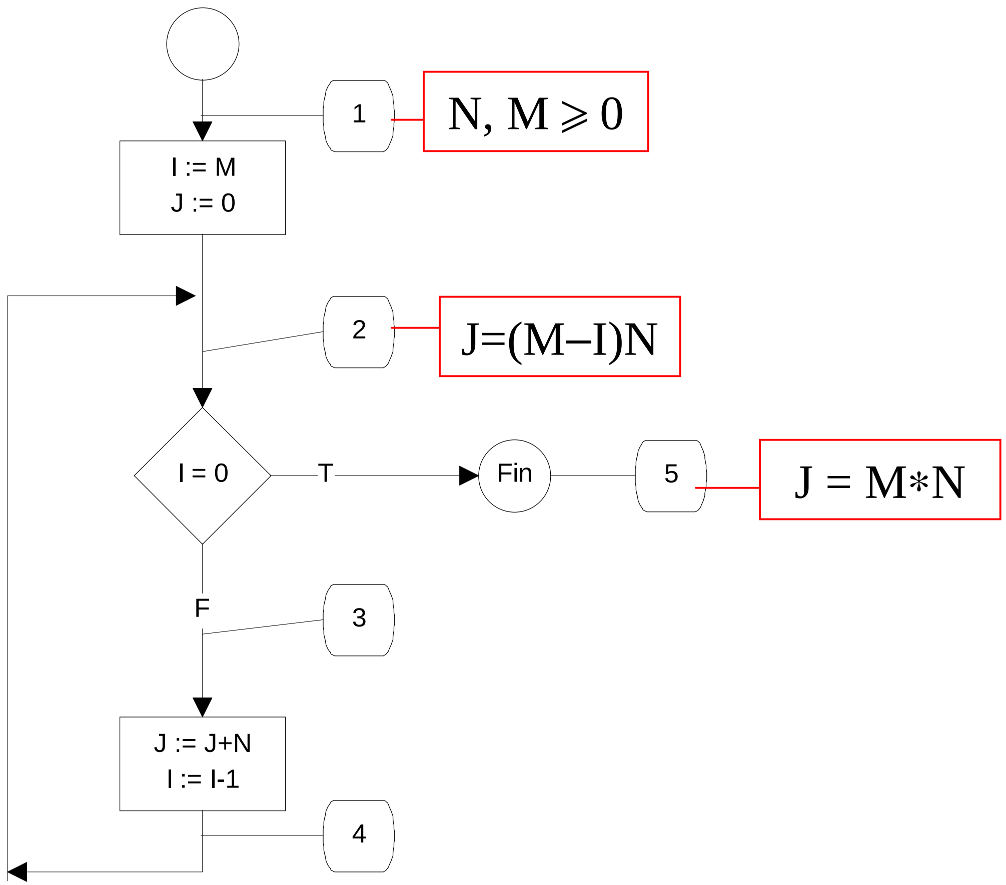
$$\Rightarrow n_0 > I_0 - M + 1$$

pour $n_0 = I_0 - M + 2$

on a : $I \leqq I_0 - I_0 + M - 2 + 1$

$$= M - 1$$

3^{ième} programme exemple



n	I	J
0	M	0
1	M-1	N
2	M-2	N+N=2N
3	M-3	2N+N=3N
4	M-4	3N+N=4N
…	…	…
m	M-m	mN

J = (M – I) N

Preuve de la correction du 3$^{\text{ième}}$ programme

Preuve par induction sur le nombre de passages en point **2**

Base : $n=1 \Rightarrow I=M \Rightarrow (M-M)*N = 0 = J = 0*M$

Pas : $I_{n+1} = I_n - 1 \wedge J_{n+1} = J_n + N$

$$= (M - I_n)*N + N \qquad \text{(fertilisation)}$$

$$= (M - I_n + 1) * N$$

$$= (M - (I_n - 1)) * N$$

$$= (M - I_{n+1}) * N$$

Preuve de la terminaison du 3$^{\text{ième}}$ programme

Procédons par induction décroissante :

M = 0 $\Rightarrow$ I = 0 $\Rightarrow$ arrêt du programme

Soit I = m, $0 < m \leqq M$

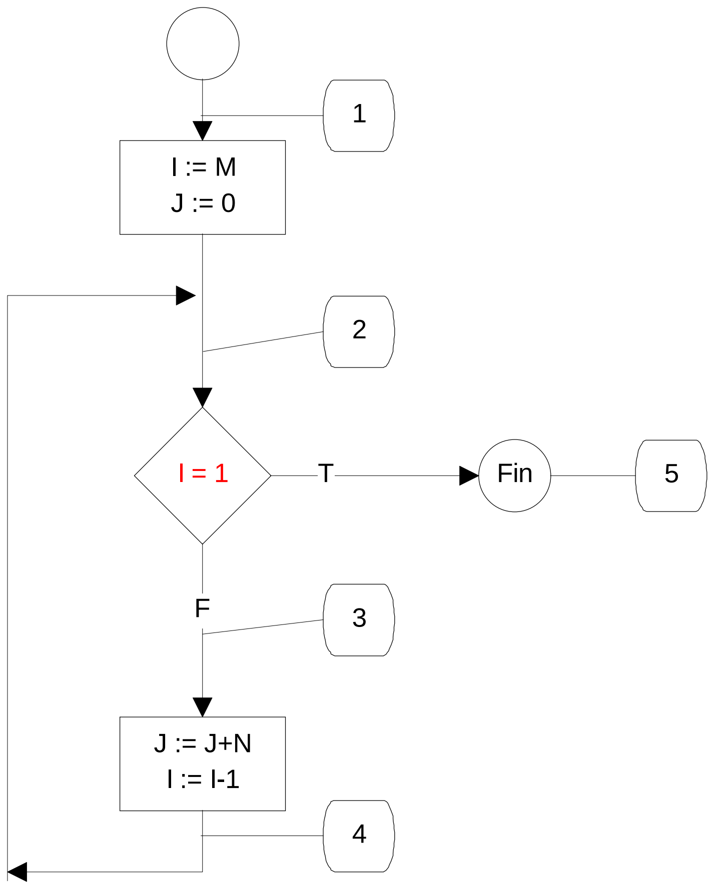
Faut démontrer qu'après 1 exécution I = $m - 1$

Si $I_n = m \Rightarrow \text{non}(I_n = 0)$, donc une exécution de la boucle

$\Rightarrow I_{n+1} := I_n - 1 = m - 1$ ✓

(puisque m > 0 $\Rightarrow m - 1 \geqslant 0$)

$3^{\text{ième}}$ programme exemple (avec erreur 1)



Base : $n=1 \Rightarrow I=M$

$\Rightarrow (M\text{-}M)*N = 0 = J = 0*M$

Pas : *marche aussi*

prévu : $I_n = 1 \wedge J_n = (M - I_n)*N$

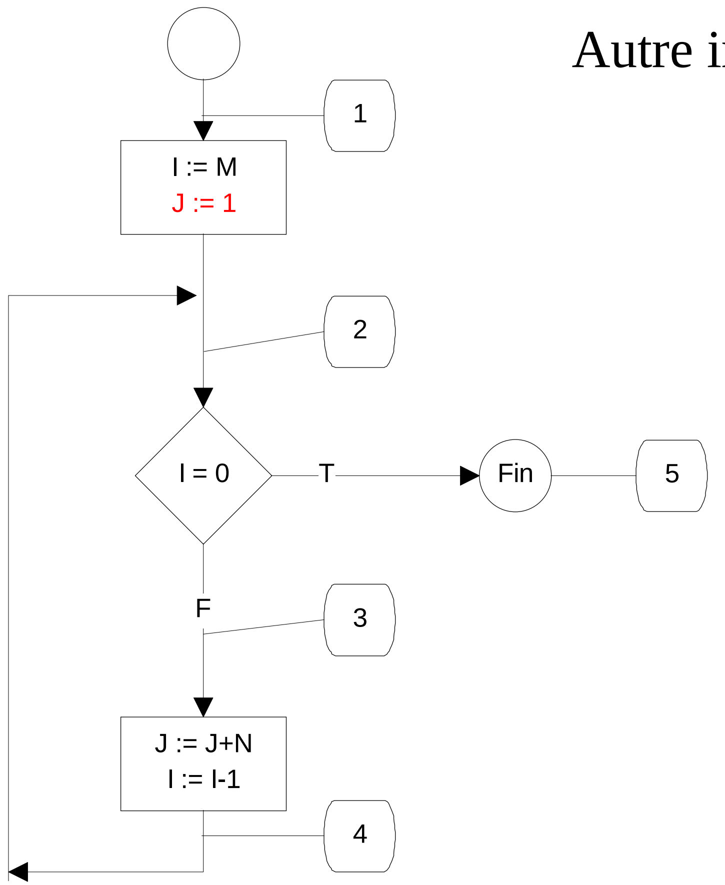
$\Rightarrow$ (en 5) $J_n = M*N$

mais : (en 5) $J_n = (M - I_n)*N$

$= (M - 1)*N$

$\neq M*N$

$3^{\text{ième}}$ programme exemple (avec erreur 2)



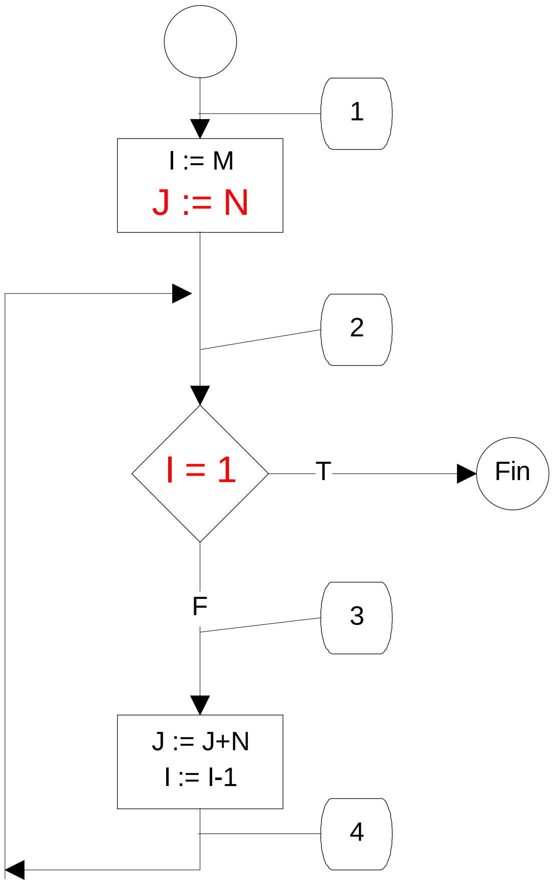
Autre invariante : J=(M-I)N+1

n	I	J
0	M	1
1	M-1	N+1
2	M-2	2N+1
3	M-3	3N+1
4	M-4	4N+1
…	…	…
m	M-*m*	*m*N+1

$$\text{et : } J_n = (M - I_n) * N+1$$

$$= MN+1 \neq MN$$

3ième programme exemple (avec erreur 3)



invariante : $J=(M-I+1)N$

Base : $n=1 \Rightarrow I=M \Rightarrow (M-M+1)*N = N = J$

Pas : *marche aussi*

$I_n = 1 \wedge J_n = (M - I_n+1)*N \Rightarrow J_n = M*N$

$= (M - 1 + 1)*N = MN = J$

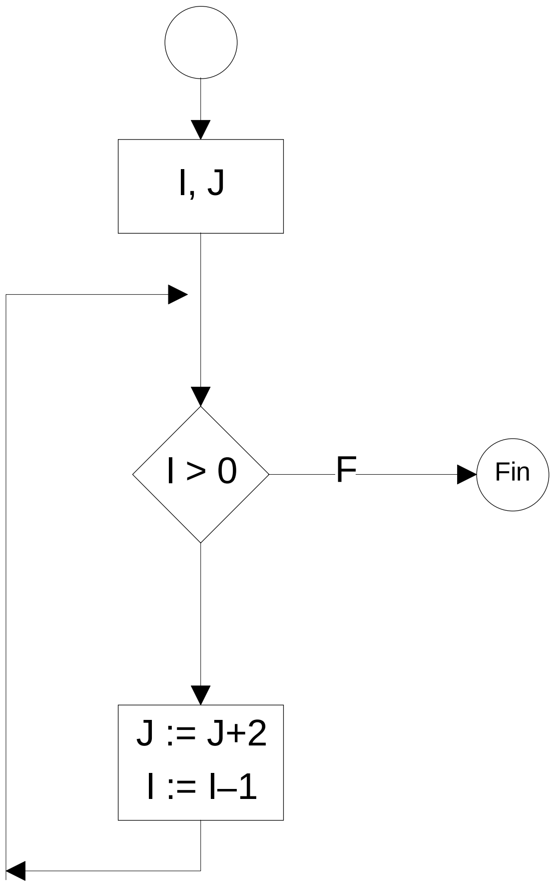
Maintenant : $M = 0 \Rightarrow I_0 = 0 \wedge J_0 = N$

$I_0 \neq 1$ donc $I_1 = -1, I_2 = -2$, etc

$\Rightarrow$ boucle infinie

marche pour tout $M > 0$ et boucle pour $M=0$

un dernier exemple



l'invariante :

n	**I**	**J**
1	I_0	J_0
2	I_0-1	J_0+2
3	I_0-2	J_0+4
4	I_0-3	J_0+6

$$\boxed{J = J_0+2*(I_0-I)}$$

$\Rightarrow$ l'assertion de sortie :

$$J = J_0 + 2*I_0$$

preuve de la correction

base : $n = 1$: $I = I_{0,}$ $J = J_0 = J_0 + 2 * (I_0 - I_0\ )$

hypothèse : $J_n = J_0+2*(I_0-I_n)$

pas : $J_{n+1} = J_n + 2 \wedge I_{n+1} = I_n - 1$

$= J_0 + 2 * (I_0 - I_n) + 2$

$= J_0 + 2\ I_0 - 2I_n + 2$

$= J_0 + 2\ (I_0 - I_n + 1)$

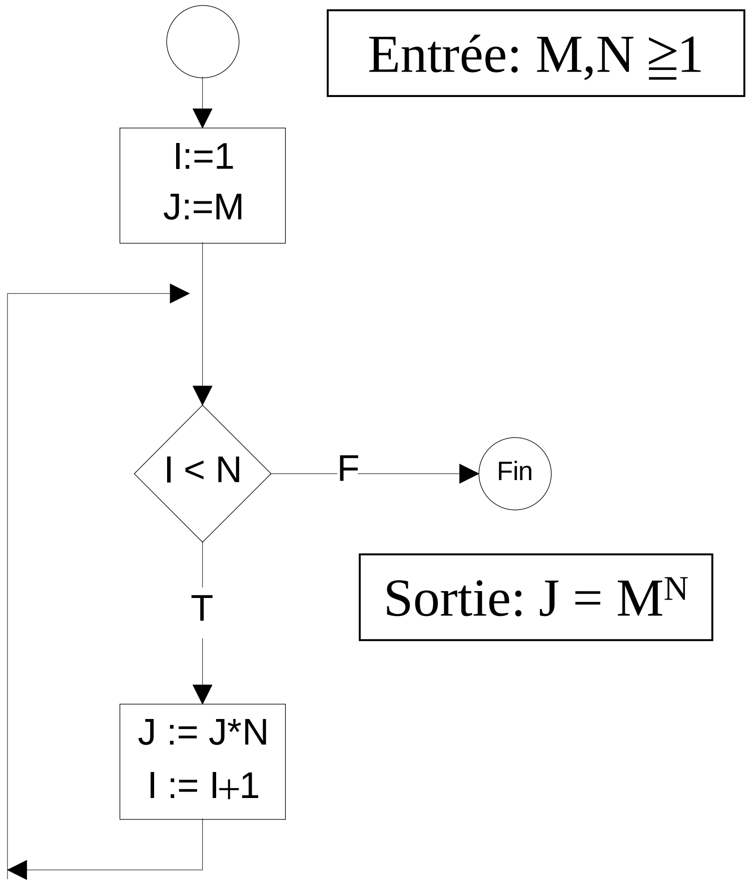
$= J_0 + 2\ (I_0 - (I_n - 1))$

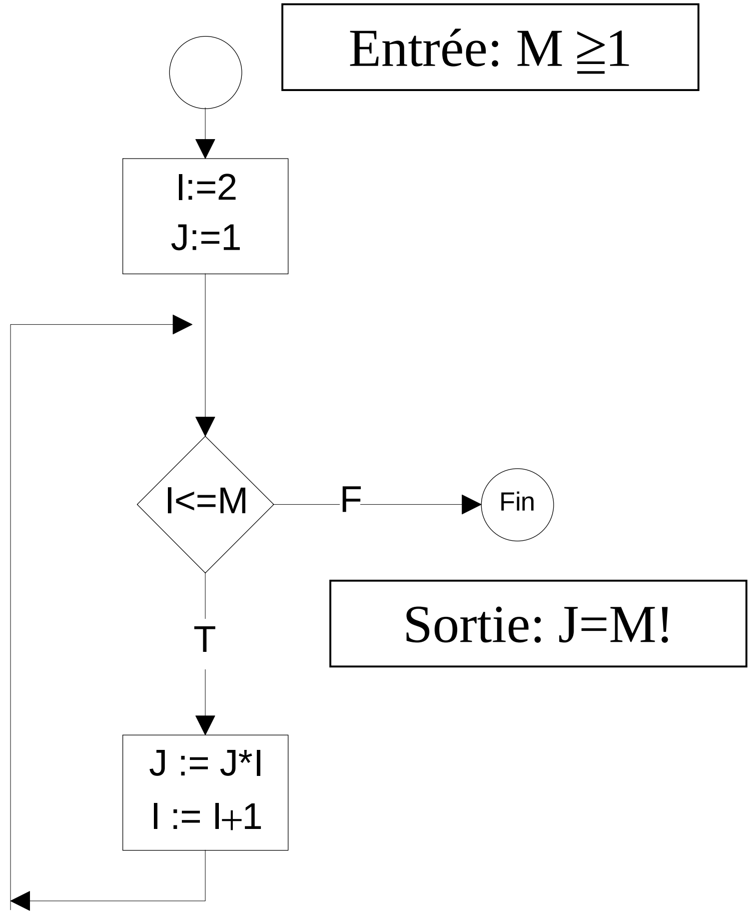
$= J_0 + 2\ (I_0 - I_{n+1})$

$\Rightarrow I_n = 0 \wedge J_n = J_0 + 2\ (I_0 - I_n) = J_0 + 2I_0$

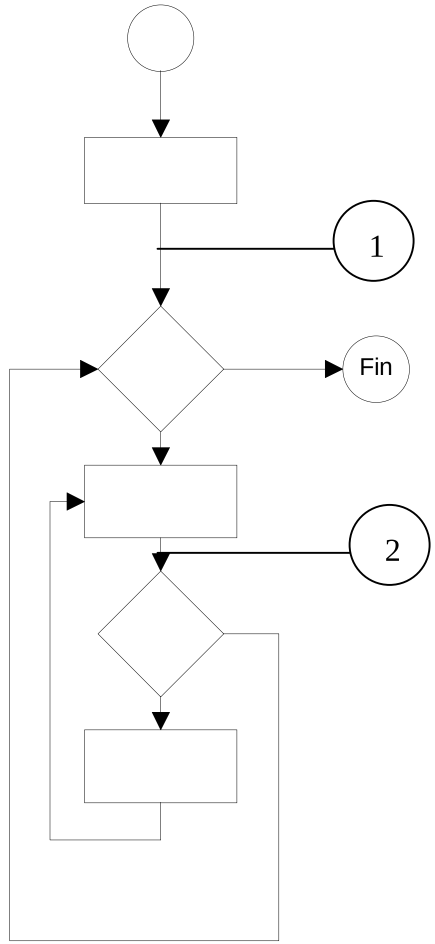
Exercices

trouvez l’invariante, démontrez la correction et la terminaison



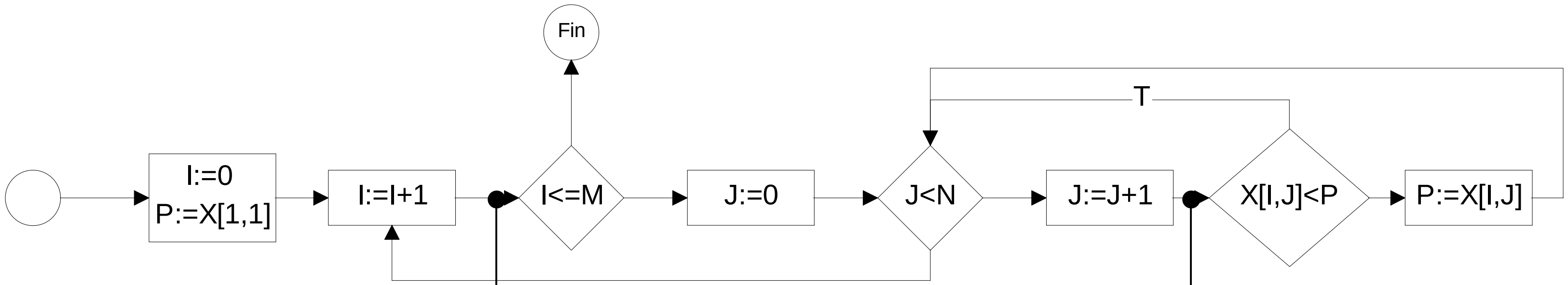


et maintenant ?



Exemple de boucles imbriquées

Entrée: X[1:M,1:N] Sortie: P = max(X)



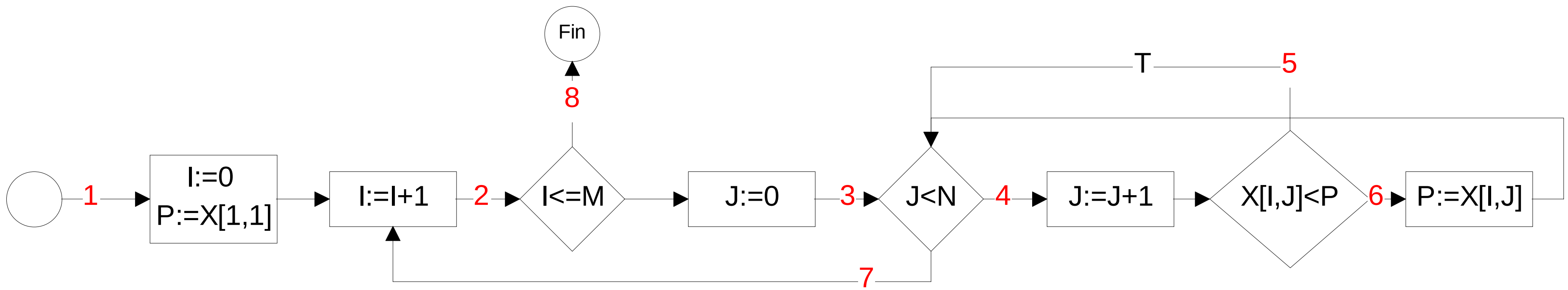
$1 \leq I \leq M \wedge P = X[1,1]$ si $I=1$ sinon $\max(X[1:I-1,1:N])$

$1 \leq I \leq M \wedge 1 \leq J \leq N \wedge$

si $I=1$ et $J=1$ alors $P=X[1,1]$

sinon $P=\max(X[1:I-1,1:N] \cup X[I,1:J-1])$

Exemple de boucles imbriquées (suite)



Pour démontrer la correction partielle du programme il faut démontrer chacun des chemins ci-dessous :

1. 1 – 2
2. 2 – 3
3. 3 – 4 – 5 – 3
4. 3 – 4 – 6 – 3
5. 3 – 7 – 2
6. 2 – 8