Géométrie algorithmique : exercices de calcul

Helmstetter Bernard

octobre 2004

Pour chaque exercice, répondre avec des formules mathématiques, ou bien donner un algorithme pour trouver le résultat, ou bien écrire une fonction `C`. Il n'est pas nécessaire d'écrire de grosses formules ; en général, l'utilisation de produits scalaires, vectoriels ou de déterminants peut considérablement simplifier les calculs.

Si besoin est, on notera (x_A, y_A, z_A) les coordonnées d'un point A de $\mathbb{R}^3$.

Parfois, il est noté *plan* $\mathcal{P}$ ou *droite* $\mathcal{D}$ sans préciser comment est défini ce plan ou cette droite (par des points, par une équation ...). À vous de choisir.

Références :

- Graphics Gems, A.S. Glassner
- http ://www.gametutorials.com/Tutorials/opengl/OpenGL_Pg3.htm#Collision
- Computational Geometry in C, J.O'Rourke, chapitre 7

1 Équations de droites, de plans et de cercles, projections, calculs d'intersections

1.1 Dans le plan

1. Écrire une équation de la droite (AB), en fonction des coordonnées de A et B.
2. Connaissant une équation de la droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$, trouver le vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A sur $\mathcal{D}$.
3. Écrire une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
4. Écrire une équation de la hauteur issue de C du triangle ABC.
5. Calculer les coordonnées du point d'intersection de 2 droites (AB) et (CD).
6. Déterminer si 2 segments $[AB]$ et $[CD]$ ont un point d'intersection.

7. Déterminer si un disque de rayon r centré en C intersecte une droite (AB)
8. Déterminer si un disque de rayon r centré en C intersecte un segment $[AB]$
9. Déterminer si un disque de rayon r centré en C intersecte un triangle PQR.
10. Écrire une équation du cercle circonscrit au triangle PQR.

1.2 Dans l'espace

1. Écrire une équation paramétrique de la droite (AB), en fonction des coordonnées de A et B.
2. Déterminer le point de la droite (AB) le plus proche d'un point M.
3. Écrire l'équation du plan (PQR) (c-à-d le plan passant par les 3 points P, Q, R), en fonction des coordonnées de P, Q et R.
4. Connaissant l'équation d'un plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, trouver 3 points non alignés P, Q et R dans $\mathcal{P}$ (ou de façon équivalente : trouver un point P et 2 vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$).
5. Déterminer le point du plan (PQR) le plus proche d'un point M.
6. Calculer les coordonnées du point d'intersection entre la droite (AB) et le plan (PQR).
7. Déterminer si la droite (AB) intersecte le triangle PQR.
8. Déterminer si la droite (AB) intersecte la boule de rayon r centrée en C.
9. Déterminer si la boule de rayon R_1 centrée en C_1 intersecte la boule de rayon R_2 centrée en C_2.
10. Déterminer si la boule de rayon r centrée en C intersecte le plan (PQR), et sinon, de quel côté elle se trouve. Si il y a une intersection, il doit s'agir d'un disque ; quel est son rayon ?
11. Déterminer si la sphère de rayon r centrée en C intersecte le triangle PQR.

2 Calcul matriciel

2.1 Transformations linéaires

1. Écrire la matrice de la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.

2. Écrire la matrice de la rotation d'angle θ et d'axe $\vec{u} = (0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de la rotation d'angle θ et d'axe $\vec{u} = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice de l'homothétie de rapport k dans $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur une droite vectorielle $\mathcal{D}$ (c-à-d passant par 0) de $\mathbb{R}^3$.
6. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur un plan vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$.
7. Écrire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Transformations projectives

On demande ici d'écrire les matrices 4x4 de transformations affines ou projectives de $\mathbb{R}^3$ (ou plus précisemment, de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ plongé cannoniquement dans l'espace projectif $\mathbb{PR}^3$).

1. Écrire une matrice de la translation de vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$.
2. Écrire une matrice de la projection sur un plan $\mathcal{P}$ par rapport au point M.