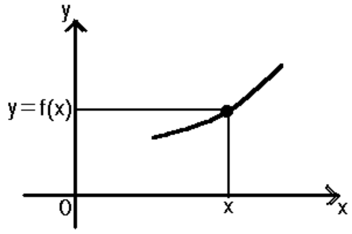
V- Etude de fonctions

Une fonction f (d'une variable réelle) fait passer d'un nombre réel variable x à un nombre y, et cela s'écrit $y = f(x)$: y est fonction de x.



Pour visualiser ce passage, on se place dans un repère orthonormé Ox, Oy formé de deux axes perpendiculaires qui portent des graduations de même longueur. On passe d'un point x sur l'axe des x vers le point correspondant $y = f(x)$ sur l'axe de y en construisant un rectangle qui donne le point de coordonnées $(x, y{=}f(x))$. Quand x varie, ces points (x , y) donnent une courbe que l'on appelle la courbe représentative de la fonction. On dit aussi qu'il s'agit de la courbe d'équation $y = f(x)$.

1) Ensemble de définition D_f d'une fonction

Cet ensemble D_f est formé des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

Quand rencontre-t-on des problèmes d'existence ? Les seuls cas à notre niveau sont les suivants :

- La division par 0 est impossible.
- Une *racine carrée* existe si et seulement si ce qui est sous le radical est supérieur ou égal à 0.
- Un *logarithme* existe si et seulement si ce qui est sous le logarithme est strictement positif.
- La fonction trigonométrique *tangente* (notée *tan*) n'existe pas lorsque $x = \pi/2 + k\pi$ (k entier relatif).

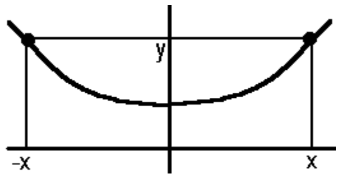
Cet ensemble de définition est soit donné par l'énoncé, dans ce cas on a intérêt à vérifier qu'il est valable, soit il est à déterminer.

Exemple : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x} - 1}$.

La racine carrée existe si et seulement si $x \geq 0$. Le logarithme existe si et seulement si $x > 0$. La division est impossible si et seulement si le dénominateur est nul, soit $\sqrt{x} = 1$, ce qui équivaut à $x = 1$. D'où $D = [0\ 1[\cup]1\ +\infty[= \boldsymbol{R}^{*+} - \{1\}$.

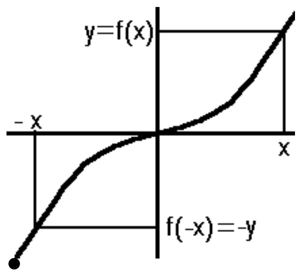
Fonction paire, fonction impaire, fonction périodique

- On dit que la fonction est paire si l'on a $f(-x) = f(x)$ pour tout x de D_f.

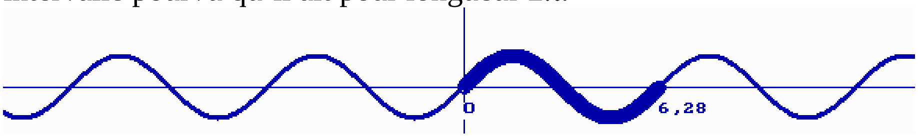


Cela signifie que les deux points $(x , y = f(x))$ et $(-x , f(-x) = f(x) = y)$ sont symétriques par rapport à l'axe des y, et ils sont tous les deux sur la courbe de f. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe vertical. L'avantage est que l'on peut se contenter d'étudier la fonction pour $x \geq 0$.

- On dit que la fonction est impaire si l'on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de D_f. Cela signifie que les points de la courbe $(x, y=f(x))$ et $(-x, f(-x) = -f(x) = -y)$ sont symétriques par rapport au point O. Là encore, on peut se contenter de réduire l'intervalle d'étude aux $x \geq 0$.

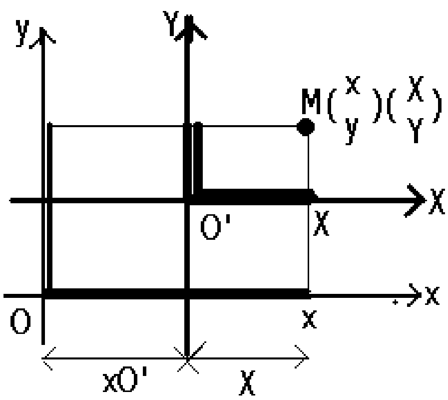


- On dit que la fonction est périodique, de période T, si $f(x+T) = f(x)$ pour tout x de $\boldsymbol{R}$. Il suffit de tracer une partie de la courbe sur un intervalle de longueur T, puis de la reproduire indéfiniment à gauche et à droite sur les intervalles successifs de longueur T. Un exemple typique de fonction périodique est la fonction trigonométrique *sinus*, qui admet pour période (la plus courte) $T = 2\pi$, puisque $sin(x+2\pi) = \sin x$. On peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, 2\pi]$ ou si l'on préfère à $[-\pi, \pi]$, ou encore à n'importe quel intervalle pourvu qu'il ait pour longueur 2π.



Changement de repère par translation des axes

On est amené à faire un changement de repère lorsque l'on désire simplifier l'équation d'une courbe. Notamment, si celle-ci semble présenter un axe de symétrie vertical, sans être l'axe des y, la fonction correspondante n'est pas paire, mais si l'on prend un nouveau repère avec ce nouvel axe vertical, l'équation de la courbe va correspondre à une fonction paire, et cela prouve qu'il existe un axe de symétrie vertical.



Considérons deux repères qui se déduisent par translation, c'est-à-dire que leurs axes restent parallèles deux à deux. Le repère initial est Ox, Oy, et le nouveau repère est $O'X$, $O'Y$, avec O' ayant pour coordonnées $(x_{O'}, y_{O'})$ dans l'ancien repère. Un point M a pour coordonnées (x, y) dans l'ancien repère, et (X, Y) dans le nouveau. La formule de passage liant les deux coordonnées est :

$$\begin{cases} x = x_{O'} + X \\ y = y_{O'} + Y \end{cases}$$ comme cela se voit sur le dessin.

Nous allons voir comment utiliser ce changement de repère dans l'exemple suivant.

Exemple : Etude de la fonction trinôme du second degré

Commençons par le cas particulier où là courbe a pour équation $y = a\, x^2$, avec a donné différent de 0. La fonction correspondante $f(x)=ax^2$ est manifestement paire. La courbe admet comme axe de symétrie l'axe des y. Et elle passe par O. Par définition, on dit que la courbe est une parabole d'axe vertical de sommet O. On remarque aussi que si a est positif, la courbe est tournée vers le haut, et que si a est négatif elle est tournée vers le bas.

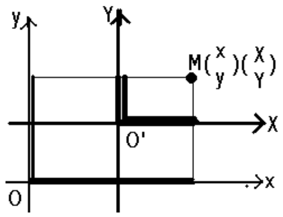
Passons maintenant au cas général, avec $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. L'équation de la courbe est $y= ax^2+bx+c$.

Effectuons un changement de repère par translation, en prenant comme nouvelle origine le point O' avec :

$$x_{O'} = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad y_{O'} = f(-\frac{b}{2a}) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

La formule de passage (des nouveaux aux anciens axes) est :

$$\begin{cases} x = x_{O'} + X = -\dfrac{b}{2a} + X \\ y = y_{O'} + Y = -\dfrac{\Delta}{4a} + Y \end{cases}$$



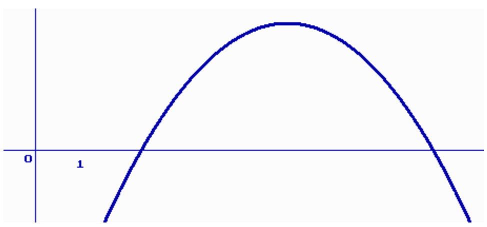
En procédant à la substitution dans l'équation $y = a\, x^2 + b\, x + c$ de la courbe, cela donne :

$$-\frac{\Delta}{4a} + Y = a(-\frac{b}{2a} + X)^2 + b(-\frac{b}{2a} + X) + c$$

Après simplification, il reste $Y = aX^2$. La courbe est une parabole de sommet O' et d'axe vertical d'équation $x = -b / 2a$.

Application : Etudier la fonction $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6$, et tracer sa courbe représentative.

La courbe d'équation $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6$ est une parabole d'axe vertical, tournée vers le bas (puisque $a = -1/4$ est négatif). L'axe de symétrie vertical a pour équation $x = -b/(2a) = 6$. Le sommet de la parabole est (6, 3) et il correspond au maximum de la fonction f.



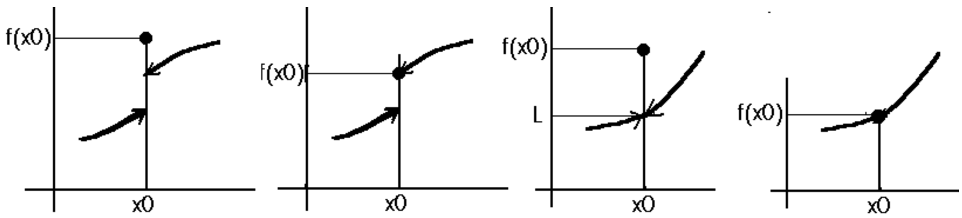
L'abscisse des points d'intersection de la parabole avec l'axe des x vérifie $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 9\text{-}6 = 3$. Il est positif : l'équation admet deux solutions $x = 2(3 \pm \sqrt{3}) = 6 \pm 2\sqrt{3}$.

2) Limites et continuité

Définitions :

- Une fonction f admet une limite (finie) L en x_0, si $f(x)$, avec x dans D_f, se rapproche infiniment près de L lorsque x se rapproche infiniment près de x_0. [1]
- Si f admet une limite à gauche (quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures), et aussi une limite à droite (quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures), et que ces deux limites sont les mêmes, la fonction admet une limite en x_0.
- Une fonction f est continue en x_0 lorsqu'elle admet une limite L (finie) en x_0 , et que cette limite est $f(x_0)$. Cela sous-entend que f est définie en x_0 ($f(x_0)$ existe).

Pour comprendre voici quelques cas de figure :



(1) (2) (3) (4)

(1) Fonction ayant une limite à gauche en x_0, et une limite à droite différente, donc pas de limite en x_0. En plus $f(x_0)$ est différent des limites à gauche et à droite. Pas de continuité en x_0 .

(2) Une limite à gauche et une limite à droite différente, donc pas de limite en x_0, et la fonction n'est pas continue en x_0. Mais comme la limite à droite est égale à $f(x_0)$ on peut dire que la fonction est continue à droite.

(3) Une limite L en x_0 , mais cette limite est différente de $f(x_0)$. La fonction n'est pas continue en x_0.

(4) Le cas classique d'une fonction continue en x_0 (elle admet une limite en x_0, et cette limite est $f(x_0)$.

- Une fonction f est continue sur un intervalle lorsqu'elle est continue en chacun des points de cet intervalle. Concrètement, cela veut dire que la courbe d'une fonction continue peut être tracée d'un trait continu, sans lever la pointe du stylo.

On démontre que les fonctions usuelles (polynômes, puissances, racines $n^{è}$, logarithmes, exponentielles, fonctions trigonométriques, etc., ainsi que leurs mélanges) sont toutes continues sur leur domaine de définition. Il n'y a donc aucun problème de limite pour les points de l'ensemble de définition, puisque la limite en un point existe et est toujours égale à la valeur de la fonction en ce point.

---

[1] Plus précisément, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si pour tout intervalle $J = [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ avec ε aussi petit que l'on veut, on peut trouver un voisinage suffisamment petit $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ autour de x_0 (mais sans prendre x_0 lui-même) tel que tout nombre x, autre que x_0, dans ce voisinage a une image $f(x)$ dans J.

Les seuls problèmes de limites se posent aux bornes du ou des intervalles de définition de la fonction, lorsque ceux-ci sont ouverts.

Et les seuls problèmes de continuité se posent lorsque la fonction prend des expressions différentes sur des intervalles adjacents. Il y a alors un problème de continuité à la jonction.

Exemples

1) Soit $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$. La fonction n'est pas définie en 0 à cause du dénominateur qui serait nul. D'où D_f = ***R****. Sur *R** la fonction est continue, plus précisément $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$ sur R*+, et $f(x)=\dfrac{x}{-x}=-1$ sur R*- . Manifestement *f* admet en 0 une limite à gauche qui est – 1, et une limite à droite qui est 1. Mais *f* n'admet pas de limite en 0.

2) Soit *f*(*x*) = sin (1/*x*) . A cause de 1/*x*, *f* n'est pas définie en 0. D_f = ***R****. Lorsque *x* tend vers 0, 1/*x* tend vers +∞, le sinus ne cesse d'osciller entre –1 et 1. Il n'y a pas de limite pour *f*(*x*) en 0.

3) Soit $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x-1}$. Cette fonction n'est pas définie pour *x* = 1, car on n'a pas le droit de diviser par 0. D_f = ***R*** – {1}. Voyons son comportement au voisinage de 1. On constate que $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1}=x^3+x^2+x+1$. Lorsque *x* tend vers 1, *f*(*x*) tend vers 4.

Prolongement par continuité

Continuons l'exemple 3° ci-dessus. La fonction *f* est définie et continue sur l'ensemble *R* – {1}, mais par sur *R*. Mais on va pouvoir lui ajouter un point pour qu'elle devienne continue sur *R*, en profitant du fait que *f* admet une limite en *x*=1. Plus précisément, on va prendre une nouvelle fonction *F* (elle a un point de plus que l'autre) :

$$\begin{cases} F(x)=f(x) \quad \text{sur} \quad D_f=R-\{1\} \\ F(1)=4 \end{cases}$$

La fonction *F* est maintenant définie sur ***R***. D'autre part, lorsque *x* tend vers 1 (sans être égal à 1), on a toujours *F*(*x*) = *f*(*x*), *F* et *f* ont la même limite en 1, d'où $\lim_{x\to 1} F(x)=\lim_{x\to 1} f(x)=4$. Et comme on a pris *F*(1) = 4, la fonction *F* est continue en 1. Maintenant la fonction *F*, obtenue en ajoutant un point à *f*, est continue sur *R*. On dit que *F* est un prolongement par continuité de *f*.

Par contre, si l'on reprend l'exemple 2° ci-dessus, où la fonction *f* n'a pas de limite en 0, on ne pourra jamais effectuer un prolongement par continuité.

Extension de la notion de limite à l'infini

Il peut arriver que l'on ait à faire tendre x vers l'infini, et l'on est amené dans ce cas à chercher la limite éventuelle de $f(x)$. Il peut aussi arriver que lorsque x tend vers x_0, $f(x)$ tende vers l'infini.

En particulier :

- Si x tend vers l'infini, $1/x$ tend vers 0.
- Si x tend vers 0+ (0 par valeurs supérieures), $1/x$ tend vers $+\infty$.
- Lorsque x tend vers l'infini et que $f(x)$ est un polynôme de degré n, tous ses termes de degré inférieur à n deviennent négligeables par rapport au terme de degré n.

Exemple : $f(x) = x^2 + 3x + 10$. Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $f(x)$ est équivalent à x^2, et tend vers $+\infty$. Pourquoi peut-on négliger les termes de degré inférieur ? Il suffit d'écrire: $f(x) = x^2(1+3/x+ 10/x^2)$ et de constater que la parenthèse tend vers 1, on a bien $f(x) \approx x^2$. Et cela se généralise.

Lorsque x ou y ou les deux tendent vers l'infini, on est amené à étudier ce que l'on appelle une branche infinie de la courbe représentative de la fonction, comme on le verra plus bas.

Quelques propriétés des limites

- La limite d'une somme de deux fonctions est la somme de leurs limites
- La limite d'un produit est le produit des limites
- Si $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0, et que $g(X)$ tend vers L lorsque X tend vers l, alors $g(f(x))$ tend vers L lorsque x tend vers x_0.

Si $f(x)$ est continue en x_0, et que $g(x)$ est continue en $f(x_0)$, alors $g(f(x))$ est continue en x_0.

Cas d'indétermination. Que faire dans ces cas ?

Lorsque l'on cherche une limite, on peut tomber sur des formes indéterminées comme $+\infty - \infty$, ou $0 \cdot \infty$, ou ∞/∞, $0/0$, ou 0^∞, etc., qui ne permettent pas de conclure. On doit alors lever l'indétermination. Pour cela, il suffit de faire ressortir l'infiniment petit qui intervient dans le problème, et une fois cela fait, il se produit une simplification qui fera disparaître l'indétermination, ce qui permettra de conclure.

Exemples

1) Limite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x}$ pour x tendant vers $+\infty$

On tombe sur la forme indéterminée ∞/∞. Pour lever l'indétermination, on remarque que $x + 1$ est négligeable devant x^2 à l'infini, d'où :

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x} \approx \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}\ , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

2) Limite de $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ lorsque x tend vers 1

C’est de la forme indéterminée 0 / 0. Pour lever l’indétermination, faisons ressortir l’infiniment petit x - 1, en multipliant en haut et en bas par $\sqrt{x}+1$:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1 \text{ qui tend vers 2.}$$

Allons plus loin en étudiant f et chercher un éventuel prolongement par continuité. La racine carrée $\sqrt{x}$ existe si et seulement si $x \geq 0$. D’autre part on n’a pas le droit de diviser par 0, ce qui impose $x \neq 1$, d’où $D_f = \boldsymbol{R}+ - \{1\}$. Elle est seulement continue sur $\boldsymbol{R}+ - \{1\}$, c’est-à-dire sur chacun des intervalles [0,1[et]1,+∞[. Faisons alors un prolongement par continuité en prenant la fonction F telle que :

$$\begin{cases} F(x)=f(x) \quad sur \quad R-\{1\} \\ F(1)=2 \end{cases}$$

La fonction F est maintenant définie sur $\boldsymbol{R}$, et au voisinage de 1, on a $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$. F admet une limite en 1 et cette limite n’est autre que $F(1)=2$. La fonction F est continue en 1. Comme f, elle est aussi continue sur $\boldsymbol{R} - \{1\}$. F est continue sur R.

3) Limite de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{-x+1}}{x}$ lorsque x tend vers 0

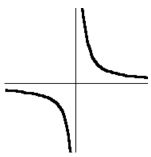
C’est de la forme indéterminée 0/0. Multiplions en haut et en bas par la quantité conjuguée du numérateur :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{-x+1}}{x}=\frac{x+1+x-1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{-x+1})}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{-x+1}} \text{ qui tend vers 1.}$$

Branches infinies

Une courbe admet une branche infinie lorsqu’un point qui circule sur la courbe s’en va à l’infini. On connaît déjà deux cas particulièrement intéressants, mais très particuliers :

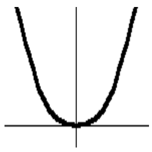
1) La courbe (hyperbole) d’équation $y=1/x$ admet une branche infinie lorsque x tend vers +∞, et dans ce cas y tend vers 0. Cela signifie que la courbe se rapproche infiniment près de la droite d’équation $y=0$, c’est-à-dire l’axe des x. On dit alors que cette droite est une asymptote pour la courbe.



L’hyperbole admet aussi une autre branche infinie lorsque x tend vers 0, puisque y tend alors vers l’infini. La courbe se rapproche alors infiniment près de la droite d’équation $x=0$, c’est-à-dire l’axe des y. Cette droite est une deuxième asymptote pour l’hyperbole.

Plus généralement, et par analogie, on dit qu’une courbe admet une droite comme asymptote si la distance entre un point de la courbe s’en allant à l’infini et le point correspondant sur la droite tend vers 0.

2) La courbe (parabole) d'équation $y=x^2$ admet une branche infinie lorsque x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, y tend aussi vers $+\infty$. La droite (OM) de pente $y/x=x$ tend à devenir verticale lorsque x tend vers l'infini. Enfin, la distance entre la courbe et la droite limite (Oy) tend vers l'infini (puisqu'il s'agit de x). On dit que la parabole admet une branche parabolique de direction verticale. Et cela n'a rien à voir avec une asymptote.



Plus généralement, si une courbe admet une branche infinie avec x et y tendant vers l'infini, et que la pente de la droite (OM), à savoir y/x , tend vers une position limite, avec une distance (entre la courbe et cette droite limite) qui augmente indéfiniment, on dira par analogie avec la parabole que la courbe admet une branche parabolique.

Revenons maintenant à l'étude complète de la branche infinie d'une courbe. Plusieurs cas se présentent :

1) Lorsque x tend vers l'infini, y tend vers un nombre fixe y_0.
Au voisinage de l'infini, la courbe se rapproche infiniment près de la droite horizontale d'équation $y=y_0$. La droite $y=y_0$ est une asymptote pour la courbe.

Exemple : $y = 1+1/x$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $1/x$ tend vers 0 et y tend vers 1. La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote pour la courbe.

2) Lorsque x tend vers le nombre fixe x_0, y tend vers l'infini. Au voisinage de l'infini, la courbe se rapproche infiniment près de la droite verticale d'équation $x = x_0$. La courbe admet une asymptote verticale.

Exemple : $y = \dfrac{1}{x-1}$. Lorsque x tend vers 1, y tend vers l'infini. La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote pour la courbe.

3) x et y tendent tous deux vers l'infini.

Lorsque le point M (x , $y= f(x)$) s'en va à l'infini, on s'intéresse à la droite (OM) dont la pente est y/x. On distingue plusieurs cas :

3a) y/x n'a aucune limite, ni finie ni infinie. On ne peut rien conclure.

Exemple : $y = x\,(2+\sin x)$. Alors $y/x = 2+\sin x$ qui ne cesse d'osciller entre 1 et 3.

3b) y/x tend vers l'infini. On en conclut que la courbe admet une branche parabolique d'axe vertical Oy (comme cela se produit pour la parabole dont l'équation est $y = x^2$).

3c) y/x tend vers 0. On en conclut que la courbe admet une branche parabolique d'axe Ox (comme cela se produit pour la demi-parabole d'équation $y=\sqrt{x}$).

3d) y/x tend vers une limite (finie) a différente de 0. Cela signifie que la droite (OM) tend à prendre une position limite oblique de pente a. On forme alors $y - ax$, et l'on distingue plusieurs cas :

- Si $y - a\,x$ n'admet aucune limite finie, on ne peut rien conclure de plus.

Exemple : $y = \sin x + x$, y/x tend vers 1, mais $y - x = \sin x$ ne cesse d'osciller entre 1 et –1.

- Si $y - a\,x$ tend vers l'infini, on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction a.

Exemple : $y = x + \sqrt{x}$, $y/x = 1 + 1/\sqrt{x}$ tend vers 1, mais $y - x = \sqrt{x}$ tend vers l'infini. La courbe admet une branche parabolique de direction la première bissectrice du repère.

- Si $y - a\,x$ tend vers une limite finie b, la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$.

En effet, prenons la droite d'équation $y = ax + b$, qui est parallèle à la position limite de la droite (OM) de pente a aussi. Donnons-nous une abscisse x allant vers l'infini, le point correspondant sur la courbe a pour ordonnée $y = f(x)$, et le point correspondant sur la droite a pour ordonnée $ax + b$. La distance verticale qui sépare ces deux points est $f(x) - ax - b$, au signe près. Puisqu'elle tend vers 0, cela signifie que la droite est une asymptote.

3) Dérivée

Définition

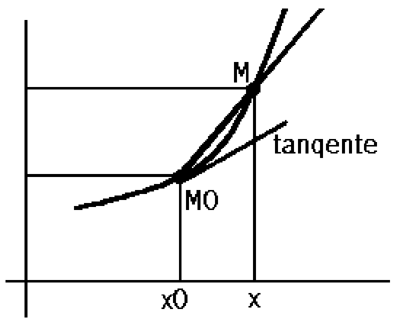
Soit un point x_0 dans l'ensemble de définition D_f. On dit que la fonction f admet une dérivée en x_0 si le taux d'accroissement de f au voisinage de x_0 , soit $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tend vers une limite (finie) lorsque x tend vers x_0. On note cette dérivée $f\,'(x_0)$.

$f\,'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lorsque la limite (finie) existe.

Lorsque la fonction admet une dérivée en chaque point d'un intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur I.

Interprétation géométrique

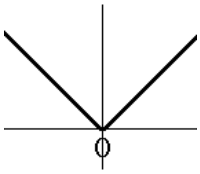
Sur la courbe représentative de f , prenons un point fixe M_0 (x_0 , $f(x_0)$), et un point M (x , $f(x)$) au voisinage de M_0. La sécante (M_0M) a pour pente $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, c'est-à-dire le taux d'accroissement. Lorsque M tend vers M_0, et que le taux d'accroissement tend vers une limite (la dérivée existe), la sécante tend à prendre une position limite, qui n'est



autre que la tangente à la courbe en M_0. Finalement la dérivée en x_0 est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0.

Que se passe-t-il dans le cas où le taux d'accroissement tend vers l'infini ? Dans ce cas, la dérivée n'existe pas, mais la courbe admet une tangente verticale au point concerné.

Il arrive aussi que la dérivée n'existe pas, et que la courbe n'ait pas non plus de tangente au point concerné.



Prenons le cas de la fonction $f(x) = |x|$, c'est-à-dire $f(x) = x$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = -x$ pour $x \leq 0$. Au voisinage de 0, son taux d'accroissement est +1 à droite, et – 1 à gauche. Il n'admet donc pas une limite en 0. La fonction n'est pas dérivable en 0, et la courbe n'admet pas de tangente en ce point. Mais on peut dire que la fonction est dérivable à droite, et qu'elle est aussi dérivable à gauche, ces deux dérivées étant différentes. La courbe admet aussi une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche, de pentes 1 et -1.

Continuité et dérivabilité

On dispose de cette propriété :

Si une fonction est dérivable en x_0, alors elle est aussi continue en ce point. [2]

Mais l'inverse n'est pas vrai, comme le montre l'exemple précédent de la fonction valeur absolue.

Dérivées usuelles

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf la fonction racine carrée $y = \sqrt{x}$ qui est définie et continue sur $\boldsymbol{R}+$, mais seulement dérivable sur R^*+ (la tangente à la courbe en 0 est verticale [3]).

---

[2] En effet, prenons le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Puisque la fonction est dérivable en x_0, on peut écrire $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f\,'(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Ainsi $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f\,'(x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$. On en déduit que $f(x) - f(x_0)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Puisque $f(x)$ admet une limite et que cette limite est $f(x_0)$, f est bien continue en x_0.

- La dérivée d'une constante est 0 : $(K)' = 0$.
- Dérivée de x^n : $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ pour $n \neq 0$.
- Dérivée de $\sqrt{x}$: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Cela revient à appliquer la formule précédente

pour $n = 1/2$.

- Dérivée de sinus, cosinus, tangente :
  $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x$.
- Dérivée d'une somme $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$
- Dérivée d'un produit : $(u(x)\, v(x))' = u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)$.
  En particulier $(K\, u(x))' = K\, u'(x)$.
- Dérivée d'un quotient : $(\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{v(x)u'(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
- Dérivée d'une fonction composée : $g(f(x))' = g'(f(x))\, f'(x)$. On multiplie la dérivée de la *grosse* fonction (comme si $f(x)$ était la variable) par la dérivée de la *petite*.
  Notamment : $(u(x)^n)' = n\ u(x)^{n-1}\, u'(x)$
  $$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Exemple : **Etude de la fonction *f* telle que** $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

1) Déterminer son ensemble de définition *D*. la fonction est-elle continue sur D ?

La racine carrée existe si et seulement si $1 - x^2 \geq 0,\ \ x^2 \leq 1,\ \ |x| \leq 1 \ \ ou\ \ -1 \leq x \leq 1$. L'ensemble de définition est *D* =[-1 , 1]. Comme la fonction *f* est la composée et le produit de fonctions continues sur leur ensemble de définition, elle est continue sur *D*.

2) La fonction est-elle dérivable en $x = 1$? En $x = -1$? Et ailleurs ? Donner la valeur de la dérivée là où elle existe.

La racine carrée a un problème de dérivabilité là où ce qui est sous le radical s'annule, en – 1 et + 1.

Voyons si la fonction est dérivable en 1. Au voisinage de 1 (par valeurs inférieures), le taux d'accroissement est $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\sqrt{1-x}$. Celui-ci tend vers 0 lorsque *x* tend vers 1-. Cela signifie que la dérivée existe en $x = 1$, et vaut 0. La tangente à la courbe est horizontale au point (1,0).

Pour étudier la dérivabilité en – 1, formons le taux d'accroissement :

---

[3] Le taux de variation au voisinage de 0 est $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque *x* tend vers 0+. La dérivée n'existe pas, mais la courbe admet une tangente verticale au point (0,0).

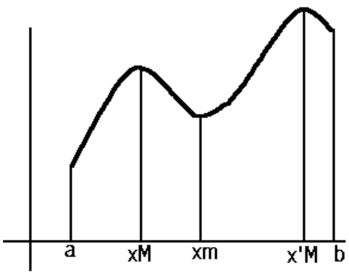
$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{(1-x)\sqrt{(1+x)(1-x)}}{x+1}=\frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$, puisque $1+x>0$. Lorsque x tend vers $-1+$, le taux d'accroissement tend vers $+\infty$. La fonction n'est pas dérivable en -1, mais la courbe admet une demi-tangente verticale au point (-1,0).

Sur]-1 , 1[la fonction est dérivable comme mélange de fonctions dérivables, et on trouve $f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$, tous calculs faits. Pour terminer l'étude de la fonction il conviendrait de chercher le signe de la dérivée, comme nous allons le voir.

4) Variations de la fonction

Une fonction f est dite croissante si $f(x)$ augmente lorsque x augmente (ou bien diminue lorsque x diminue). Plus précisément, une fonction est croissante (au sens large) sur un intervalle I si quels que soient x_1 et x_2 sur I avec $x_1 < x_2$ on a toujours $f(x_1) \leq f(x_2)$. Elle est strictement croissante sur un intervalle I si quels que soient x_1 et x_2 sur I avec $x_1 < x_2$ on a toujours $f(x_1) < f(x_2)$.

On dit que la fonction f admet un maximum local en x_0 s'il existe un voisinage ouvert de x_0 (sans x_0 lui-même) où tout x de ce voisinage est tel que $f(x) < f(x_0)$. Il en est de même pour un minimum local ($f(x) > f(x_0)$). Un extremum est un maximum ou un minimum.



Exemple de fonction définie sur [a b], admettant deux maximums locaux en x_M et x'_M , et un minimum local en x_m. Remarquons que la fonction admet un minimum global en a (mais ce n'est pas un minimum local).

Il existe un lien étroit entre le sens de variation de la fonction et le signe de la dérivée.

Supposons la fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée est nulle partout sur I, la fonction est constante sur I.
- Si la dérivée est positive (ou nulle) sur I, la fonction est croissante sur I.
- Si la dérivée est strictement positive sur I, sauf en un nombre fini de points (ou en des points isolés) où la dérivée est nulle, la fonction est strictement croissante sur I .
  (idem entre la dérivée négative et la décroissance).
- Si la dérivée s'annule en x_0 tout en changeant de signe de part et d'autre, la fonction admet un extremum en x_0.

5) Courbe représentative de la fonction

Lorsque l'on se donne une valeur de *x*, le calcul de *y* = *f*(*x*) est immédiat sur un ordinateur. Il suffit d'écrire la formule de la fonction *f* que l'on s'est donnée. A partir de la variable *x* (un nombre flottant) on passera au nombre *y* (lui aussi flottant), par le biais de la fonction concernée

Par exemple, prenons la fonction *f* telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-x}$. D'où le programme :

```
float f(float x)
{  float y;       y=sqrt(x+1)/(sqrt(x+1.)-x);       return y; }
```

Si l'on veut connaître *f*(2,5) il convient, dans le programme principal, de demander son affichage, en écrivant : y=f(2.5) ; printf(« %3.3f »,y) ;

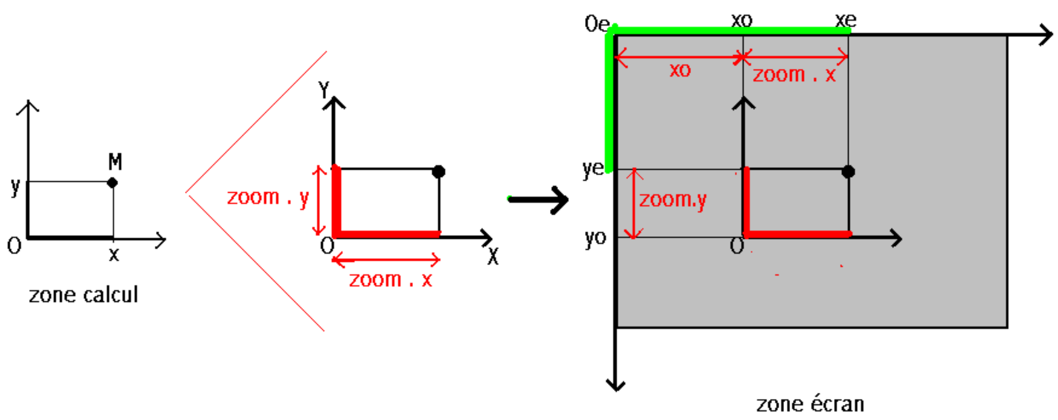
Mais comment tracer la courbe ?

Il suffit de calculer *y* = *f*(*x*) pour un grand nombre de valeurs de *x*, ce qui donnera la courbe. Mais un problème d'échelle se pose. Lorsque l'on prend des points (*x*,*y*) avec *y*=*f*(*x*), les valeurs prises par *x* (et *y*) sont en général de l'ordre de quelques unités, comme par exemple prendre *x* entre – 3 et 3. Le problème est de passer des coordonnées *x* , *y* aux coordonnées correspondantes *xe* , *ye* sur l'écran, qui elles peuvent être de l'ordre de plusieurs centaines (de pixels), et sont des nombres entiers positifs. Voici comment s'y prendre :

On commence par faire un zoom, par exemple *zoom*=100, plus précisément, on peut faire des zooms différents pour *x* et *y* : *X* = *zoomx* . *x* et *Y* = *zoomy* . *y*. Dans le repère *OX*,*OY*, le dessin se retrouve grossi. Puis on va transporter ce dessin sur l'écran, où l'origine *Oe* est en haut à gauche de l'écran, avec un axe horizontal vers la droite et un axe vertical vers le bas. C'est dans ce repère que sont les coordonnées *xe* et *ye* des points de l'écran. Sur l'écran, on place l'origine *O* de l'ancien repère en un point (*xo*, *yo*) que l'on se donne. La formule de passage des coordonnées du repère initial (celui des calculs) au repère sur l'écran s'en déduit :

xe* = *xo* + *zoom* . *x

ye* = *yo* – *zoom* . *y



Exemple : tracé de la courbe de la fonction *f* précédente

Supposons que l'on ait une zone écran de dimensions 640 sur 480. On se donne *xo*=100, *yo*=250, et *zoomx*=*zoomy*=140. Avec ce zoom, une graduation de longueur 1 dans la zone des calculs devient une longueur de 140 pixels sue l'écran. On commence par tracer les axes de coordonnées, grâce à la fonction souvent appelée *line* qui trace en fait un segment donné par les deux coordonnées de chacune de ses deux extrémités :

```
line(xo-100,yo,640,yo); line(xo,yo+250,xo,0);
```

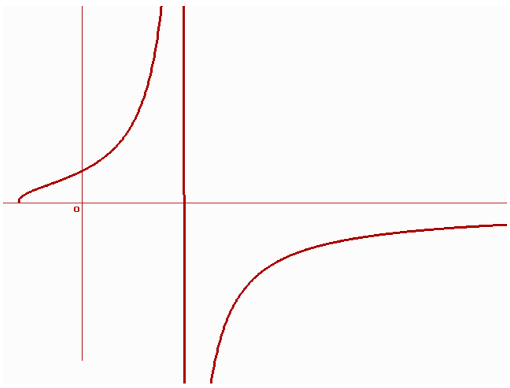
Puis, à l'aide d'une boucle *for*(), on dessine un grand nombre de points, de façon à avoir l'apparence d'une continuité dans le tracé.

```
for(x=-0.999; x<8.; x+=0.01)
  { y=f(x);     /* appel de la fonction f()  */
    xe=xo+zoom*x; ye=yo-zoom*y;
    placer le point xe,ye sur l'écran
  }
```

Amélioration de la méthode

Pour assurer la continuité, on préfère assimiler la courbe à une succession de petits traits. C'est aussi beaucoup plus rapide. Au lieu de tracer les points avec un pas de 0,005 comme précédemment, on peut prendre un pas beaucoup plus grand, comme *pas*=0,1, et l'on trace une ligne entre deux points successifs. La boucle *for*() est chargée de joindre le point que l'on vient de calculer *xe*, *ye*, avec le précédent *oldxe*, *oldye*. Mais comme le premier point tracé n'a pas de prédécesseur, on commence la boucle sur le deuxième point :

```
x=-0.9999; y=f(x); xe=xo+zoomx*x; ye=yo-zoomy*y; ;  /* le premier point */
for(x=-0.9999+pas; x<8.; x+=pas)
  { oldxe=xe;oldye=ye;       y=f(x);      xe=xo+zoomx*x; ye=yo-zoomy*y;
     tracer une  ligne entre le point oldxe , oldye et le point xe , ye
  }
```



Exercices

Exercice 1

Parmi tous les cylindres ayant le même volume *V* donné, quel rapport doit-il y avoir entre le rayon de la base *R* et la hauteur *h* pour avoir le cylindre de surface *S* minimale ? (par surface on entend les deux bases et la surface latérale).

On a $\begin{cases} S = 2\pi R^2 + 2\pi R h \\ V = \pi R^2 h \end{cases}$

V étant donné, on peut exprimer *h* par rapport à *R* : $h = \dfrac{V}{\pi R^2}$. En substituant dans la première équation, on obtient *S* comme fonction de *R* : $S = 2\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R} = 2(\pi R^2 + \dfrac{V}{R})$. Il reste à étudier la fonction *S*(*R*) sur ***R**+**, dont la dérivée est $S'(R) = 2(2\pi R - \dfrac{V}{R^2})$. La dérivée s'annule pour $R^3 = \dfrac{V}{2\pi}$, $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, et elle est du signe de $2\pi R - \dfrac{V}{R^2} = \dfrac{2\pi R^3 - V}{R^2}$, qui est aussi du signe de $2\pi R^3 - V$, or cette quantité croît quand *R* augmente, elle passe donc du signe négatif au signe positif. On en déduit que *S* admet un minimum pour $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Avec $R^3 = \dfrac{V}{2\pi}$, on trouve $h = \dfrac{V}{\pi R^2} = 2R$. Le cylindre de surface minimale a sa hauteur égale au diamètre de sa base.

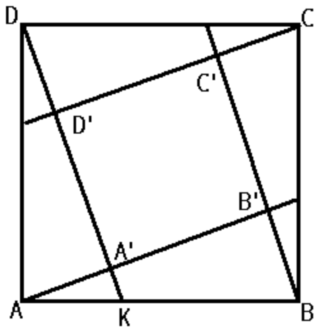
Exercice 2 : Obturateur

D'abord quelques rappels de trigonométrie

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle (forcément aigu) est le côté adjacent sur l'hypoténuse, le sinus est le côté opposé sur l'hypoténuse, et la tangente est le côté opposé sur le côté adjacent. Par projection orthogonale d'un segment de longueur *L* sur une droite faisant un angle θ avec le segment, on obtient un segment de longueur *L* cos θ.

Pour traiter le cas général d'un angle orienté (qui va de -∞ à +∞) on utilise le cercle trigonométrique (on reverra cela plus tard).

Voici quelques formules :
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\qquad$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\qquad$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$



On prend un carré *ABCD* de côté 1 et on y place quatre segments issus de chacun de ses sommets et faisant le même angle *x* avec le côté correspondant, comme sur le dessin. Cela donne un carré *A'B'C'D'* dont l'aire *a* est fonction de l'angle *x*, qui va de 0 à π/4.

1) Montrer que $a(x) = (\cos x - \sin x)^2$.

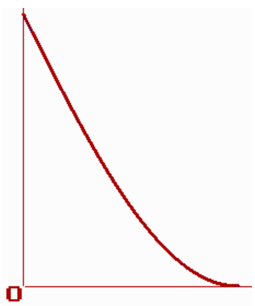
Dans le triangle rectangle *AKD*, on a *AK*= tan *x*, d'où *KB* = 1 – tan *x*. Par projection orthogonale, *A'B'* = *KB* cos *x* = (1 – tan *x*) cos *x* = cos *x* – sin *x*. Finalement :
$a(x) = (\cos x - \sin x)^2$

2) Montrer que $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$.

$$\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$$

puisque $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Tracer la courbe représentative de $a(x)$



On a $a(x) = 2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$ avec *x* dans $[0, \frac{\pi}{4}]$

On vérifie que $a(0) = 1$ et $a(\pi/4) = 0$.

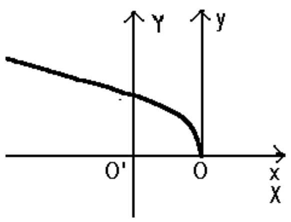
Exercice 3 : Etude de la fonction f_n telle que $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$, *n* étant un nombre entier naturel donné.

1) Déterminer l'ensemble de définition *D* de f_n.

$f_n(x)$ existe si et seulement si ce qui est sous le radical est positif ou nul : $1 - x \geq 0$, $x \leq 1$, d'où $D =]-\infty, 1]$.

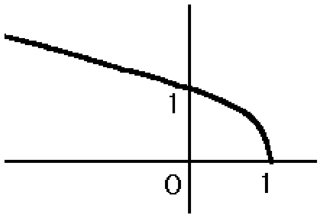
2) Etudier la fonction f_0 et tracer sa courbe représentative.

On connaît la courbe représentative de $y=\sqrt{x}$ qui est une demi-parabole d'axe (*Ox*). On en déduit que la courbe de $y=\sqrt{-x}$ est aussi une demi-parabole d'axe (*Ox*) avec $x \leq 0$ et $y \geq 0$.



Faisons un changement de repère par translation avec comme nouvelle origine *O*' (-1, 0). La formule de passage pour un point $M\,(x\,,y)\;(X\,,Y)$ est :

$\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y \end{cases}$. L'équation de la courbe précédente devient $Y=\sqrt{1-X}$. C'est l'équation de f_0, d'où la courbe :



3) Pour $n>0$, calculer la dérivée f_n' lorsqu'elle existe. Etudier précisément la dérivabilité en 1.

On sait que $\sqrt{x}$, définie et continue sur ***R+*** n'est dérivable que sur ***R*+***. Dérivons f_n sur]-∞ , 1[où l'on ne prend pas 1 :

$$f_n\,' = nx^{n-1}\sqrt{1-x} - \frac{x^n}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2nx^{n-1}-(2n+1)x^n}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{avec } n>0$$

$$= \frac{x^{n-1}(2n-(2n+1)x)}{2\sqrt{1-x}}$$

Pour étudier la dérivabilité en 1, prenons le taux d'accroissement au voisinage de 1- :

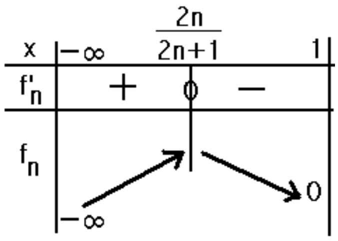
$\dfrac{y}{x-1} = \dfrac{x^n\sqrt{1-x}}{x-1} = -\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$ de la forme –1/0+ = -∞ lorsque *x* tend vers 1. La fonction n'est pas dérivable en 1 mais la courbe admet une tangente verticale au point (1,0).

4) Etudier le comportement à l'infini de f_n .

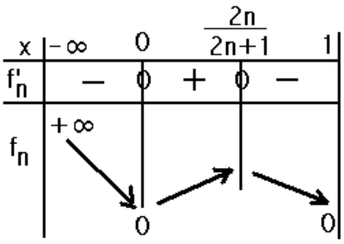
Lorsque *x* tend vers -∞, 1-*x* ≈ -*x* , $f_n\,(x) \approx x^n\sqrt{-x}$ qui tend vers l'infini (+∞ si *n* est pair, -∞ si *n* est impair). Formons $\dfrac{f_n(x)}{x} = x^{n-1}\sqrt{1-x} \approx x^{n-1}\sqrt{-x}$ qui tend vers l'infini, même pour *n*=1. La courbe admet une branche parabolique de direction (*Oy*).

5) Dresser le tableau de variations de f_n , pour *n* positif, (*n*>0), en distinguant deux cas selon que *n* est pair ou impair. Calculer en particulier la dérivée f_n'(0) qui n'a pas toujours la même valeur selon la valeur de *n*.

Lorsque n est impair, $n - 1$ est pair , x^{n-1} reste ≥ 0. La dérivée est du signe de $2n - (2n+1)x$. D'où le tableau de variations :

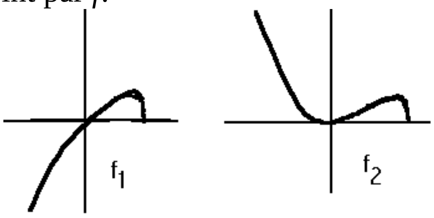


Lorsque n est pair, x^{n-1} change de signe de part et d'autre de 0 :6)



$f_n'(0) = 0$ pour $n > 1$, à cause de $x^{n-1} = 0$. Mais pour $n = 1$, $f_n'(1) = 1$.

6) Tracer les courbes représentatives de f_1 et f_2. Préciser la valeur de l'extremum atteint par f.



Exercices à faire

Exercice 1

Programmer le tracé de courbes sur l'écran d'ordinateur.

Exercice 2

Un projectile est lancé par un canon avec une vitesse initiale v_0 qui est toujours la même, et sous différents angles φ avec l'horizontale. On prendra comme origine *O* des coordonnées le point d'où part le projectile. Le sol est représenté par l'axe des *x*.

On se donne l'angle φ entre 0 et $\pi/2$ (90°). Le projectile est soumis à la seule force verticale qui est son poids mg, en négligeant les frottements dus à la résistance de l'air. (rappelons que g est l'accélération de la pesanteur). Son mouvement obéit à la loi fondamentale de la dynamique **F** = *m* **a** , **a** étant l'accélération (il s'agit de vecteurs). Au départ, au temps 0, il se trouve en O (0,0). A l'instant t, il se trouve en M (x , y) avec x et y qui sont des fonctions du temps t, et que l'on veut déterminer. Le point M se projette en H et en K sur les axes Ox et Oy. Les points H et K sont soumis aux projections de la force agissant sur M : H (x, 0) est soumis à une force nulle, et K (0 , y) est soumis à la force $-mg$ dirigée vers le bas. On rappelle que la vitesse est la dérivée du déplacement par rapport au temps, et que l'accélération est la dérivée de la vitesse. Dans le cas présent, le point H est soumis à une accélération nulle, soit $x'' = 0$ d'après la loi fondamentale de la dynamique (x'' est la dérivée seconde de $x(t)$ par rapport à t), et le point K est soumis à une accélération constante $-g$, soit $y'' = -g$. étant entendu qu'il s'agit de dérivées par rapport au temps t.

1) Par intégration déterminer x en fonction de t. On devra trouver $x = v_0 \cos\varphi \,.\, t$.

2) Faire de même pour y. On trouvera $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\varphi \; t$.

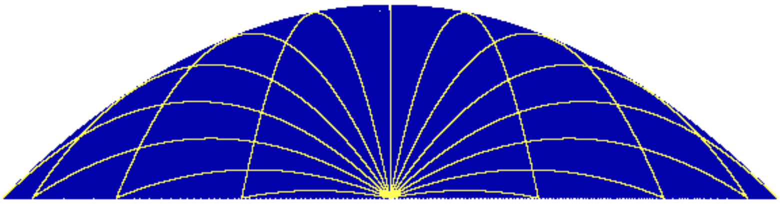
3) Eliminer t pour déterminer y en fonction de x, ce qui donnera l'équation de la courbe décrite par le projectile. On posera $k = \tan\varphi$ (lorsque x décrit $[0, \pi/2[$, k va de 0 à l'infini, et pour chaque valeur de k, on a une courbe), et $b = \frac{v_0^2}{2g}$. On obtiendra une parabole avec une équation où interviennent la constante b et le paramètre k (φ n'intervient que par sa tangente k). Rappelons que $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi$.

4) Déterminer la portée L du canon, c'est-à-dire à quelle distance du point de départ le projectile touche le sol. On trouvera $L = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$

5) Pour quelle valeur de l'angle φ obtient-on la portée maximale, et quelle est cette portée ?

6) On prend maintenant φ entre 0 et π. On admettra que lorsque φ va de $\pi/2$ à π, d'où k de $-\infty$ à 0- , l'équation de la trajectoire parabolique reste la même que celle que l'on a trouvée précédemment (mais k est négatif maintenant). Lorsque k varie dans ***R***, on obtient une famille de paraboles qui sont les trajectoires des projectiles lancés sous différent angles avec une vitesse initiale v_0 donnée. On veut déterminer l'enveloppe de ces paraboles, c'est-à-dire la courbe qui est tangente en chacun de ses points à une parabole de la famille. On admettra que les points (x,y) de cette enveloppe doivent vérifier d'une part l'équation de ces paraboles, de la forme $G(x, y, k)=0$, et aussi $G'(x, y, k) = 0$, où G' est la dérivée par rapport à k. En éliminant k entre ces deux équations, constater que l'on obtient l'équation d'une parabole. Cette enveloppe parabolique est appelée parabole de sécurité car la zone qui est située au-dessus d'elle est hors de portée des projectiles.

7) Programmer pour visualiser diverses trajectoires, ainsi que leur enveloppe qui est la parabole de sécurité.



Indication : On se donne v_0=1 par exemple et g = 0,981. On peut évidemment tracer les paraboles à partir de leur équation $y = -b(1+k^2)x^2 + kx$, mais le mieux est d'utiliser le calcul différentiel qui a permis d'en arriver là. On va déterminer *x* et *y* en fonction du temps *t*, par le biais de leur vitesse *x*', *y*' et de leur accélération *x*'', *y*''. On commence par se donner les conditions initiales au temps 0 : *x*=0, *y*=0, et les vitesses de *x* et *y* : *vx*=*v0**cos(*phi*); *vy*=*v0**sin(*phi*). Puis on va avancer dans le temps. Pour cela, on divise le temps en petits intervalles *dt*, par exemple *dt* = 0,001. Pendant chaque *dt*, *x* augmente à chaque fois de *vx***dt* (puisque par définition *vx* = *dx*/*dt*), on obtient ainsi *x* en fonction du temps (mouvement uniforme à vitesse constante). Pour *y*, on part du fait que son accélération *ay* reste fixée à -*g* . Pendant chaque *dt*, *y* augmente à chaque fois de *vy***dt*, et *vy* augmente de *ay***dt* (par définition de l'accélération *ay* = *dv*/*dt*), ce qui donne *y* en fonction du temps (mouvement uniformément accéléré). Le point (*x*,*y*) va décrire une parabole.